MATEMÁTICA BÁSICA PARA CIENCIAS ADMINISTRATIVAS

Anwar Julio Yarin Achachagua
Beatriz Silvia Surichaqui Tiza

MATEMÁTICA BÁSICA PARA CIENCIAS ADMINISTRATIVAS

Primera Edición

Anwar Julio Yarin Achachagua

Beatriz Silvia Surichaqui Tiza

Autor - Editor
Anwar Julio Yarin Achachagua
Beatriz Silvia Surichaqui Tiza
Av. Revolución s/n Urb. Pachacamac
Lima – Perú.

Primera edición digital, Marzo 2023.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2023-02407

Anwar Julio Yarin Achachagua. Doctor en Ciencias de la Educación y Candidato a Doctor en Ingeniería Ambiental. MBA en Dirección General y Maestro en Gerencia del Mantenimiento. Estudios de Segunda Profesión en Investigación Operativa, Ingeniería Mecánica, Ingeniería Industrial y en Educación. Experiencia en docencia universitaria en la Universidad Nacional del Callao, Universidad Tecnológica del Cono Sur, Universidad Ricardo Palma, Universidad Nacional Federico Villarreal, TECSUP, Universidad Antonio Ruiz de Montoya. Fue docente de la Maestría en Ciencias con Mención en Energética de la Universidad Nacional de Ingeniería a cargo del curso de Competencias, Investigación e Innovación. Asimismo, fue docente en la Escuela de Posgrado de la FIME-UNAC., encargado del dictado del curso de Análisis de Ciclo de Vida y Reposición de Equipos en la Escuela de Posgrado de la FIME-UNAC. Actualmente docente investigador de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Publicaciones como "Análisis de la confiabilidad del sistema de molienda en una planta concentradora, basado en la criticidad", "Los efectos de la solidificación unidireccional en la microestructura de un acero del tipo austenítico", entre otras.

RESUMEN DEL MANUSCRITO

Las matemáticas juegan un papel muy importante en cualquier profesión porque de alguna manera estamos relacionados con los números y las matemáticas básicas. Por ejemplo, en el campo de la gestión empresarial turística, esto es ciertamente importante, ya que es necesario realizar el coste de las actividades de gestión turística, etc. Todo tipo de recursos deben ser administrados de manera responsable, por lo que es necesario cuantificar todos los recursos, lo que nos dará resultados financieros consistentes con sus actividades cuantitativas.

Para ello es necesario de conocer las bases de las matemáticas, las cuales son el conocimiento de los números reales, el orden de las operaciones, la cual se debe seguir para tener un resultado correcto, las propiedades que se tienen tener para facilitar las operaciones algebraicas que uno querer realizar.

Es por ello que este libro da un enfoque sobre las bases de la matemática que se requieren conocer para ingresar al mundo de la administración, en donde se darán ejemplos y ejercicios que ejercicios que servirán para reforzar cada tema.

CONTENIDO

Capítulo 1 Conjunto. y números reales 10

1. Introducción 10
2. Tipos de números reales 13
   - 2.1. Números naturales (N). 13
   - 2.2. Números enteros (Z). 13
   - 2.3. Números racionales (Q) 14
   - 2.4. Números irracionales (I). 15

Capítulo 2 Propiedades de los números reales 20

1. Introducción 20
2. Propiedades de los números reales: 20
   - 2.5. Propiedad transitiva de la igualdad: 20
   - 2.6. Propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación: 21
   - 2.7. Propiedades asociativas de la suma y la multiplicación: 22
   - 2.8. Propiedades distributivas: 23
   - 2.9. Propiedades del inverso: 24

Capítulo 3 Operaciones con números reales 27

1. Introducción 27
2. Propiedades de las operaciones con números reales 28

Capítulo 4 Exponentes y radicales: 36

1. Introducción 36
2. Definición de exponente 36
3. Definición de radicales 36
3. Leyes de los exponentes y radicales 37

Capítulo 5 Operaciones con expresiones algebraicas 42

1. Introducción 42
2. Operaciones algebraicas 43
   - 2.1. Suma de expresiones algebraicas 43
   - 2.2. Sustracción de expresiones algebraicas 44
   - 2.3. Eliminación de los símbolos de agrupación 44
   - 2.4. Multiplicación de expresiones 45
3. Productos especiales 46
   - 3.1. División de expresiones 47

Capítulo 6 Factorización 53
1. Introducción 53
Capítulo 7 Fracciones 61
1. Introducción 61
2. Tipos de fracciones 61
2.1. Fracción Propia 62
2.2. Fracción Impropia 62
2.3. Fracción Impura 62
3. Simplificación de fracciones 62
Capítulo 8 Ecuaciones lineales 68
1. Introducción 68
2. Principios de ecuaciones lineales 70
2.1. Principio de suma 70
2.2. Principio de multiplicacion 70
REFERENCIAS 73

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Propiedades y ejemplos de las operaciones con números reales..... 28
Tabla 2: Ley de exponentes y radicales 37
Tabla 3: términos de las expresiones algebraicas..... 43
Tabla 4: Operaciones con expresiones algebraicas de productos especiales..... 46
Tabla 5: División de expresiones..... 48
Tabla 6: Pasos de la división de expresiones 50

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Representación de los números enteros en la recta numérica 14

Capítulo 1

Conjunto. y números reales

1. Introducción

Alrededor del año 500, se expresó el comienzo de nuestro sistema de numeración en la India, se adoptaron soluciones negativas en la ecuación, tratando los números como raíces de otros números que no se pueden expresar, convirtiéndolos en números entendibles o denominados como racionales. En el siglo XVI se hizo común el usar las líneas horizontales para diferenciar los términos fraccionarios, con esto se resuelven algunas incógnitas que se tenían, aparecieron otras dudas, tales como el tener que resolver ecuaciones de segundo grado o mayores, esto problemas comenzaron a aparecer como expresiones inexplicables, por lo que surgió un nuevo tipo de número, al que llamaron números imaginarios, como solución a la raíz cuadrada de los números negativos.

Cualquiera que sea el dueño de un negocio necesita estar atento a cómo van las cosas. Pero, ¿cómo se hace? Los profesionales financieros suelen medir el rendimiento de una empresa mediante el cálculo de fracciones, conocidas como índices financieros. Comúnmente se utilizan diversas razones financieras. ¿Cuál usar? Esto dependerá del profesional, el cual tiene que identificar si quiere medir el crecimiento, el rendimiento, los niveles de deuda o algún otro aspecto de las operaciones de una empresa. Una métrica importante en las ventas minoristas es el índice de rotación de inventario. En un cierto período de tiempo,

$$\text{Relación de rotación de inventario} = \frac{\text{ingreso neto}}{\text{stock del inventario}},$$

En el punto de venta del inventario se valora en dólares para el punto de venta. Al agregar los términos apropiados para las ventas netas y el inventario promedio, la fórmula se ve así:

$$razón\ de\ rotación\ de\ inventarios = \frac{\text{ingreso bruto} - \text{devoluciones y rebajas}}{\frac{\text{stock inicial} + \text{stock al cierre}}{2}}$$

El índice rotatorio del stock ayuda a comprender la velocidad de venta y repone el inventario de un vendedor: cuanto mayor sea el índice, más rápido girará el inventario.

Un índice muy bajo significa una gran cantidad de inventario, bienes que permanecen en stock durante mucho tiempo y se dañan fácilmente. Una relación elevada indicaría niveles de stock bajos y se le asocia un riesgo que el minorista pierda ventas o pague un precio alto para reabastecerse en pequeñas cantidades. El índice rotatorio del stock optimo depende de la empresa, pero un índice de rotación óptimo para cada año de 6, es óptimo para las empresas minoristas. En efecto, la razón de la rotación de stock se diferencia entre productos de ventas, ya sea para los electrodomésticos o para los alimentos.

El índice rotatorio de acciones es una manifestación de las expresiones algebraicas. Sus cálculos incluyen el tener que remplazar las variables (ventas totales, etc.) por números reales y tener que resolver las operaciones matemáticas.

Es por ello que, para resolver estos problemas algebraicos se tienen que comprender los números, los cuales se encuentran dispersos en diferentes conjuntos. Un conjunto es una colección de elementos, en donde estos comparten una cosa en común. El ejemplo que se puede brindar es el conjunto de números que son pares y están en el rango de 5 y 11, este conjunto vendría a estar conformado por los números 6, 8 y 10. En donde estos números pares se les conocen como objetos y pertenecen al conjunto.

$$x = \{6, 8, 10\}$$

Una forma de definir un subconjunto es listar sus objetos de las maneras que nos den la conveniencia, pero enserados entre llaves. Un ejemplo de este es el conjunto anterior, el cual se compone de {6, 8, 10}, este conjunto es representado por la letra A. El conjunto A se le denomina subconjunto del conjunto B si y solo si cada elemento de A es también un elemento de B. Por ejemplo, si A = {6, 8, 10} y B = {6, 8, 10, 12}, entonces A es un subconjunto de B.

$$A = \{6, 8, 10\}$$

$$B = \{6, 8, 4, 10, 12\}$$

$$B = \{4, \{6, 8, 10\}, 12\}$$

O también se puede representar de la siguiente forma:

$$B = \{4, A, 12\}$$

Donde A viene a ser el conjunto de los números 6, 8 y 10

El conjunto pude ser usado para agrupar o tener una lista de cosas que se pueden usar o tener un ordenado para categorizarlos, como pueden ser el conjunto de herramientas, un conjunto de muebles o cualquier cosa que uno dese agrupar. Esto con la intención de organizar y tener a la vista todos los objetos que uno dese tener en orden, para luego poder decidir qué hacer con este conjunto, como lo puede ser el tener un conjunto de materiales que uno quiere comparar. Al tenerlo, se pude identificar que materiales se han adquirido como también, identificar que materiales no se han podido conseguir en la tienda. Con esto se pude identificar que material faltaría como también se pude identificar qué precios contienen cada material y cuanto se ha gastado.

En el caso de los conjuntos donde intervienen los números reales, estos son representados por los nombres y son conocidos como 1, 2, 3, etc. Este conjunto conforma el conjunto de los enteros positivos.

Los números surgieron de la necesidad de contar objetos, personas, etc. Empezamos el número de objetos con 1, luego 2, 3, 4 y así sucesivamente. Existe controversia sobre si el número 0 debe ser considerado como un número que pertenezca al conjunto de los números naturales; ya que estos números fueron inventando con la función de contar objetos que son consecuente del número 0, es por ellos que algunos expertos tratan el 0 un número natural y otros no.

Los dos usos que tienen los números naturales son: la representación del tamaño de un grupo o conjunto finito y son usados para identificar la posición de los elementos en una secuencia ordenada. Como principal característica que representan a los números naturales, es el orden que estos tienen. Así, debido al orden que tienen, los números son comparables entre sí. Por ejemplo, podemos destacar en el sentido de que 8 es mayor que 3 o 1 es menor al 6.

$8 > 3$ donde el símbolo “>” significa mayor que

$1 < 6$ donde el símbolo “>” significa menor que

Estos números naturales contienen una condición, la cual es que se representan por la adición y los productos de estos, debido a que cuando se trabajan con estos, el resultado siempre da un número positivo

$$7 + 3 = 10$$

$$7 \times 3 = 21$$

Sin embargo, esto no sucede al restar o dividir

$$(5 - 12 = -7)$$

$$\frac{4}{3} = 1.33$$

2. Tipos de números reales

2.1. Números naturales (N).

Los números naturales fueron inventados por un matemático llamado Kronecker, quien una vez dijo: "Dios hizo los números naturales, el resto es obra del hombre". maya, griego, chino, etc. Incluso hay evidencia fósil de que los primeros humanos entendían los números y los usaban para contar el ganado, los días de luna llena y los períodos menstruales.

Los números naturales son utilizados para identificar y contar los números positivos que son mayor a 0 y los cuales son infinitos, el conjunto de los números naturales está representado por la letra **N**. Están ordenados, lo que permite representarlos en una línea que comienza en 0, que también se puede considerar incluida en el conjunto. Sus elementos son los siguientes:

$$N = \{1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$$

2.2.Números enteros (Z).

El conjunto de enteros está relacionado con la necesidad de llenar ciertos vacíos que existen al trabajar con números naturales, esto es como resolver restas, donde el minuendo es menor que la su cadena, representa dinero perdido en los negocios, temperaturas negativas, la profundidad del océano, etc.

Una persona incapaz de realizar ciertas restas, produciría una gran cantidad de números negativos, primero llamados "números dudosos" o "¡números imposibles!". El número cero, por otro lado, apareció en Mesopotamia alrededor del siglo III a C. como número sin contenido. La creación de este número fue usado como medio para distinguir valores positivos (a la derecha del cero) de otros valores negativos (a la izquierda del cero).

Por lo tanto, el conjunto extendido de enteros se puede escribir como:

$$Z = \{\ldots -2; -1; 0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$$

2.2.1. La recta numérica.

Los números negativos se consideran lo contrario de sus correspondencias positivas, y viceversa.

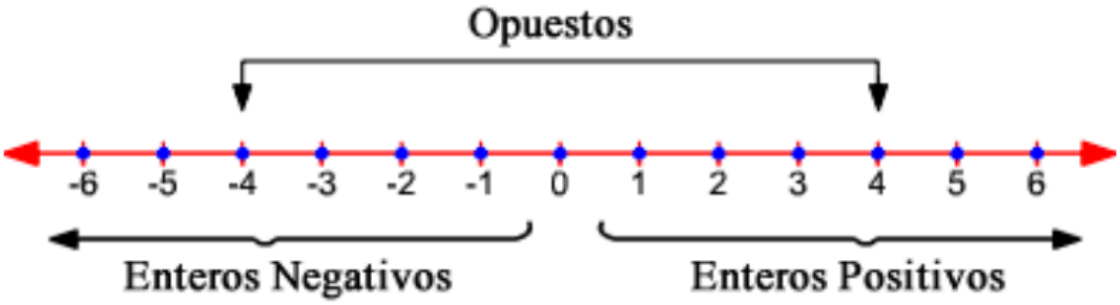

Figura 1. Representación de los números enteros en la recta numérica.

Fuente: Instituto Nacional José Miguel Carrera. (2020).

2.3.Números racionales (Q).

Los egipcios usaban fracciones con números enteros positivos para calcular soluciones a problemas prácticos; estos fueron los primeros números racionales en representar "partes de un todo" utilizando el concepto de enteros inversos.

Los antiguos matemáticos griegos creían que dos cantidades son equivalentes si se encuentra una tercera cantidad, de modo que las dos primeras cantidades son múltiplos de la última, es decir, se puede encontrar una unidad. Es común que las dos cantidades tengan medidas correctas. El principio de Pitágoras, nos indica que todo número es un

cociente de números enteros. Siendo esta expresión una manera de que dos cantidades cualquiera, son congruentes, dando sentido a los números.

Los números racionales y sus conjuntos incluye números como $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{3}$. Se puede escribir como una razón (cociente) de dos números. En otras palabras, los números racionales son aquellos que se pueden escribir en la forma $\frac{x}{y}$. donde **x** y **y** son números enteros y $\boldsymbol{y} \neq 0$. (El símbolo "≠" se lee como "diferente de") y no es divisible por 0. El símbolo **Q**, es utilizado para hacer la representación de los números racionales, proviene de la palabra italiana quoziente, que se deriva de la obra de Giuseppe Peano. en 1895.

Los números racionales son representados con números decimales contables, como $\frac{4}{3}$ = 1.25 y $\frac{6}{5}$ = 1.2, o con números decimales irreducibles (con un grupo de dígitos que se repiten infinitamente), los cuales puede ser reemplazado por repetición como lo pueden ser $\frac{2}{3}$ = 0.666…, $\frac{-4}{11}$ = -0.3636…. Los elementos de un número racional son representados por números que les denomina como cocientes de dos enteros, como lo son **a** y **b**. Están representados por Q.

$$Q = \{x \in R / x = \frac{a}{b}, a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$$

2.4.Números irracionales (I).

Los números irracionales aparecieron tras el curso de la historia que tienen las matemáticas y se estuvieron relacionando con la geometría. Las cantidades infinitas se descubrieron en el siglo VI a.C. gracias a la escuela pitagórica, esto ocurrió ya que se intentaba encontrar una solución para las relaciones entre las diagonales y los lados que contienen un pentágono. Las matemáticas pitagóricas se basan en números enteros positivos y todo se puede expresar como operaciones entre ellos, en donde se representan formas que consisten en un número finito de puntos.

Los números representados por decimales infinitos que no se repiten son denominados como números irracionales. Estos números no se pueden escribir como números enteros divididos por otros enteros. Números como $\sqrt{2}$ o (pi) son números

irracionales. Los elementos de un número irracional son números que son representados por el cociente de dos enteros a y b. Estos se muestran en la con la letra I.

$$I = \{x \in R / x \neq \frac{a}{b}, a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$$

Ejemplo 1: Colocar 1 X en el lugar correspondiente.

	N	**Z**	**Q**	**I**	**R**
0,16					
-4					
π					
0,444…					
$\sqrt{3}$					
$\sqrt{-74}$					
$\sqrt{-5}$					

Respuesta:

En el primer caso, se tiene el numero 0,16, en donde este es el resultado de una división como $\frac{25}{4}$, es por ello que el primer número es un número racional.

En la segunda opción, se tiene a -4, el cual es negativo, este vendría a ser el un número entero.

En la tercera opción, se tiene a π, el cual al ser un número que no se puede escribir, este pertenecería a los números irracionales.

En la cuarta opción, se tiene al número 0,444…, en donde este es resultado de una división, resulta ser un número racional.

En la quinta opción, se tiene al número $\sqrt{3}$, el cual, al no tener una raíz fija, resulta ser un número irracional.

En la sexta opción, se tiene al número $\sqrt{-74}$ el cual, al no tener una raíz fija, resulta ser un número irracional.

En la séptima opción, se tiene al número $\sqrt{-5}$ el cual, al no tener una raíz fija, resulta ser un número irracional.

Ejemplo 2: Colocar Las letras a los tipos de conjunto que pertenecen:

a. = {1,4,7,10,13,16, 19}

b. =$\{\sqrt{-2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}\}$

c. = {-8, -6, -4, -2, 0}

En el caso de a, se tiene al conjunto de números {1, 4, 7, 10, 13, 16, 19}, los cuales son números naturales, por la falta de números negativos, su falta de números fraccionados y por no ser números irracionales, por lo que la respuesta seria la letra **N**.

En el caso de b se tiene al conjunto de números$\{\sqrt{-2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}\}$, los cuales están conformado por números con raíces que no son exactas, por lo cual estos números son irracionales y la respuesta de esta sería la letra **I**.

En el caso de c se tiene al conjunto de números {-8, -6, -4, -2, 0}, los cuales están conformados por números enteros, por lo cual la letra que representaría a los números seria la letra **N**.

Ejercicio 1: Clasifica las afirmaciones como verdaderas o falsas. Si es falso, explique por qué.

1. -10 se le es denominado como un número entero
2. $\frac{2}{12}$ se le es denominado como un número racional
3. -4 se le es denominado como un número natural
4. 0 no se le considera como un número racional
5. 7 se le es denominado como un número racional
6. $\frac{10}{0}$ se le es denominado como un número racional
7. $\frac{6}{3}$ no se le considera como un número entero positivo
8. π se le es denominado como un número real
9. $\frac{0}{12}$ se le es denominado como un número racional
10. 0 se le es denominado como un número natural

11. -4 es inferior a 0
12. Todo número entero son, o positivo o negativo

Ejercicio 2: Responder las siguientes interrogantes

1. ¿El producto de restar y dividir dos números enteros, da como resultado un número entero?

2. ¿Es cierto que todo subconjunto de un entero logra tener el primer elemento?

3. Un número entero logra ser par si es que se puede expresarse como 3X, conociendo que X logra ser un entero, también, si logra ser un entero impar, si es que se logra expresarse como 3X + 2, donde X es un entero. Dar una razón:
    a. Sumando dos números pares, resulta en otro número par

    b. El producto de dos números pares, resulta en otro número par.

    c. Sumando dos números impares, resulta en un número par.

    d. Si el entero **X** resulta ser un múltiplo de 3, entonces el entero X^2 también da un resultado que es múltiplo de 3.

4. Exprese los siguientes decimales periódicos en forma racional ($\frac{p}{q}$):
    a. 2, 345345 . . .
    b. 13, 023491491 . . .
    c. 0, 285714285714 . . .
5. Brinde ejemplos de números irracionales.
        i. :
        ii. :

iii. :

iv. :

6. ¿Los resultados de sumar, restar, multiplicar y dividir números irracionales producen números irracionales?

7. Determina el número racional que se encuentra dentro de los siguiente números

   a. $\frac{3}{5}, \frac{7}{4}$

   b. $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$

8. ¿Hay una consecuente para a si es irracional?

9. Si sumamos un número racional a un número irracional, ¿qué número obtenemos?

Capítulo 2

Propiedades de los números reales

1. Introducción

Los números reales surgieron por la necesidad de calcular y resolver los problemas que tenían las personas originales, en donde estos problemas se les presentaban constantemente. Está escrito que los habitantes de Babilonia las usaban para contar su ganado. Gracias a matemáticos como Pitágoras, los egipcios fueron los primeros en usar fracciones. Durante el siglo XIX, gracias a la ayuda de dos famosos matemáticos, Georg Cantor y Richard Dedekind, gracias a ellos fue posible construir y sistematizar números reales. Estos dos personajes históricos de las matemáticas intentaron sistematizar los números reales a través de varios inventos.

Cuando se suma dos números reales, el resultado obtenido resultara en todos los casos en un número real. De igual forma, en el caso de multiplicar estos números, se obtiene un número real. Es por ello que estas operaciones son esenciales para la sistematización de los números reales. Estas operaciones tienen propiedades que se explicaran a profundidad y si bien son algo básicas, son necesario para comprender las diferencias de las operaciones algebraicas.

2. Propiedades de los números reales:

2.5.Propiedad transitiva de la igualdad:

Si un número es igual a otro número, entonces el segundo número es igual al tercero, decimos que el primer número es igual al tercero.

$$Si\ a = b\ y\ b = c, entonces\ a = c$$

La propiedad transitiva se puede utilizar en varios contextos matemáticos diferentes. Un ejemplo es el álgebra. Para dos expresiones iguales, si también sabemos que una de las expresiones es igual a la tercera, podemos usar las otras expresiones para encontrar las variables que faltan, como en el ejemplo muy simple de arriba.

Sin embargo, las propiedades transitivas no necesitan usar números o expresiones y pueden usarse con otros tipos de objetos como: los precios que incrementan o disminuyen con el paso de los años, en donde si al año pasado el dólar subió 0.3 y luego bajo este año, se puede decir que el dólar esta igual al del año pasado.

2.6.Propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación:

La historia de las propiedades conmutativas tiene sus raíces en el álgebra, la rama de las matemáticas que estudia cómo combinar elementos estructurales, ya sean números o cantidades, según reglas específicas. El origen de la palabra "álgebra" se remonta a las antiguas matemáticas babilónicas, donde lograron crear un sistema de aritmética que podía usarse para realizar cálculos matemáticos. Entre las operaciones básicas de suma y resta, la ley conmutativa se conoce desde la antigüedad. A medida que el concepto de número continuaba expandiéndose, también lo hacía el alcance de la suma y la multiplicación.

¿Crees que la suma cambiará si cambiamos el orden de los números? Por ejemplo, si calculamos la suma de 28+7 y 7+28, ¿crees que el resultado será diferente? La propiedad conmutativa asegura que, independientemente del orden en que tomemos los términos, el resultado de la suma no cambiará. Puedes ver que 28+7=35 y 7+28=35. Este resultado también se puede aplicar al momento de calcular un producto, en donde 2*8 es igual a $8 * 2$. En donde los resultados de estos dos son iguales como se puede ver el producto de $2 * 8 = 16\ y\ 8 * 2 = 16$.

El orden de sumar o multiplicar dos números reales no cambia el resultado.

Conmutativa de la suma

$$a + b = b + a$$

Conmutativa del producto

$$a * b = b * a$$

Ejemplo Propiedad conmutativa

$(-12) + 3 = 3 + (-12)$ se pude ver que el número 12 puede cambiar de ubicación, estando adelante o atrás

$-9 = -9$, con esto de evidencia que la ubicación del número 12 no afecta al resultado

$(-6) * 3 = 3 * (-6)$ se pude ver que el número -6 puede cambiar de ubicación, estando adelante o atrás

$-18 = -18$ con esto de evidencia que la ubicación del número -6 no afecta al resultado

2.7.Propiedades asociativas de la suma y la multiplicación:

En un tratado algebraico publicado en 1830, se intentó explicar esta expresión como un tratamiento lógico comparable a los elementos de Euclides. El cual habla de dos tipos de álgebra, álgebra aritmética y álgebra simbólica. En donde se describe al álgebra simbólica como la ciencia del uso de reglas arbitrarias para tratar de alguna manera con símbolos arbitrarios y combinaciones de símbolos. De hecho, es difícil dar una fecha exacta, porque la gente sabía desde la antigüedad la propiedad asociativa, por ejemplo, $2 * 3 = 3 * 2$, pero gradualmente la gente se dio cuenta de que esta es una propiedad general con la que se pueden dividir la suma y la multiplicación, y luego se convierte en una especie de investigación. Para ser justos, este descubrimiento fue hecho por muchas personas.

Al sumar o multiplicar tres números reales, el resultado de los dos primeros números realizado sobre el tercer número es equivalente a la operación del primer número sobre el resultado de los dos últimos números.

Asociativa de la suma

$$a + (b + c) = c + (a + b)$$

Asociativa de la multiplicación

$$a * (b * c) = c * (a * b)$$

La propiedad asociativa se utiliza en gran parte para calcular una operación en donde uno puede ordenar los números a conveniencia, sacando el resultado más fácil, como lo puede ser el calcular $2 * 9 * 1$, en donde el orden que quiero darle, sería el siguiente, $1 * 2 * 9$, por lo que el resultado no cambió, pero el orden si, siendo el resultado 18 pero empezando por los números bajos como el 1 y 2.

Ejemplo Propiedades asociativas

$(-6 + 3) + 9 = (-6) + (3 + 9)$ se puede observar que, por medio de la propiedad asociativa, el orden de la ecuación cambia, siendo que el -6 está restando a la suma de 3+9 en lugar de restar al 3

$$-3 + 9 = -6 + 12$$

$6 = 6$ dando de esta forma que el resultado es igual ya sea -3+9 o -6+12, el orden no afecta al resultado

$\big((-4) * 5\big) * 3 = (-4) * (5 * 3)$ se puede observar que, por medio de la propiedad asociativa, el orden de la ecuación cambia, siendo que el -4 está multiplicando al producto de 5*3 en lugar de multiplicar al 5

$$(-20) * 3 = (-4) * (15)$$

$(-60) = (-60)$ dando de esta forma que el resultado es igual ya sea -20*3 o -6*-15, el orden no afecta al resultado

2.8.Propiedades distributivas:

Los atributos siempre han estado presentes en el mundo matemático y probablemente han sido utilizados desde la antigüedad; por ejemplo, cualquier método para multiplicar un solo dígito por un solo dígito utiliza la propiedad distributiva. Pero es importante que te preguntes, ¿quién fue el primero en reconocer estas propiedades En todo el mundo? Se sabe que el término se originó a principios del siglo XIX, cuando los matemáticos comenzaron a analizar diferentes tipos de objetos que son más abstractos que los números, como los cuaterniones y sus funciones. Al momento de hablar sobre las propiedades de los números, estas propiedades no se exploraron a fondo hasta que las matemáticas alcanzaron su apogeo, cuando las propiedades asumidas previamente tuvieron que aclararse para hacer coherente al algebra y permitir el estudio del tipo de "álgebra" alternativa.

Multiplicar el número real de la suma de dos números, es equivalente a sumas los productos de estos dos números que se quería multiplicar.

Distributiva de la multiplicación respecto a la suma

$$a(b + c) = ab + ac$$

Ejemplo Propiedades distributivas

$7 * (6 + 2) = (7 * 6) + (7 * 2)$ se puede apreciar que, por medio de la propiedad distributiva, el 7 pasa a multiplicar a los números 6 y 2

$$7 * 8 = 42 + 14$$

$56 = 56$ dando de esta forma que el resultado es igual ya sea 7*8 o 42+14, el orden no afecta al resultado

2.9.Propiedades del inverso:

1. La suma de un número real (a) y su opuesto (-a) es cero. (-a) es el inverso aditivo de (a).

$$a + (-a) = (-a) + a$$

$$0 = 0$$

Demostración de la Propiedades del inverso

$$6 + (-6) = (-6) + 6$$

$$0 = 0$$

2. Multiplica un número real a ≠ 0 por su recíproco 1/a para obtener 1. 1/a es la multiplicación inversa de (a)

$$a * \frac{1}{a} = \frac{1}{a} * a$$

$$1 = 1$$

Demostración de la Propiedades del inverso

$$(-3) * \left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right) * (-3)$$

$$1 = 1$$

Ejemplo 1: Propiedades de los números reales

a. $x * (y - 4z + 7w) = (y - 4z + 7w) * x$, usamos la conmutativa de la multiplicación

b. Por medio de la asociativa de la multiplicación

$$4 * (7 * 9) = (4 * 7) * 9$$
$$4 * 63 = 28 * 9$$
$$252 = 252$$

Ejemplo 2: Resolución de problemas paso a paso

a. Demostrar que $(6 + x) - y = 6 + (x - y)$

Empezamos desde el lado izquierdo

$(6 + a) - b = (6 + a) + (-ab)$ definición de la resta

$= 6 + [a + (-b)]$ propiedad asociativa

$= 6 + (a - b)$ definición de la resta

b. Demostrar que $7(3x + 4y + 2) = 21x + 28y + 14$

Por medio de la propiedad distributiva

$$7 * (3x + 4y + 2) = 7 * (3x) + 7 * (28y) + 7 * (2)$$

Pero debido a la naturaleza, se utiliza la asociativa para la multiplicación $7 * (3x) = (7 * 3)x = 21x$, lo cual indica que $7 * (3x) = 21x$

Se puede decir que:

$7(3x + 4y + 2) = 21x + 28y + 14$

Ejercicio 1: Clasifica las oraciones en verdaderas o falsas.

1. Todo número real tiene un inverso.

2. El inverso de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$

3. El inverso adicional de 7 es $\frac{1}{7}$

4. $3 * (3 * 2) = (3 * 2) * (3 * 5)$

5. $x - y = -x + y$

6. $(x + 3) * (5) = 5x + 15$

7. $\frac{x+2}{2} = \frac{x}{2} + 1$

8. $3 * \left(\frac{x}{4}\right) = \frac{3x}{4}$

9. $x + (y + 7) = (x + y) + (x + 7)$

10. $8 * (9x) = 72x$

Ejercicio 2: Indique qué propiedad de número real se utiliza

1. $3(2x + 3y) = 6x + 9y$
2. $(x + 7) + y = y + (x + 7)$
3. $4(5y) = (4 * 5)y$
4. $3/4 = 3 * 1/4$
5. $7 * (x - y) = (x - y) * (7)$
6. $x + (y + x) = (x + y) + x$
7. $4 - x = 4 + (-x)$
8. $3 * (5 + 6) = 3(6 + 5)$
9. $(5 + x) * y = 5x + xy$
10. $(-4) * (-7 + 5) = (-4) * (-7) + (-4) * (5)$

Ejercicio 3: Demuestra que las oraciones son correctas usando las propiedades de los números reales.

1. $4a(x + 6) = 4ax + 24a.$
2. $(7 + x) - y = 7 - (x + y)$
3. $(x + y) * (5) = 5x + 5y$
4. $2 * [27 + (x + y] = 2 * [(y + 27) + x]$
5. $x * [(3y + 4) + 6] = 3xy + 10x$
6. $(x + 6) * (y + z) = xy + xz + 6y + 6z$

Ejercicio 4: Demuestre que:

$$4(2x + 3y + 6z) = 8x + 12y + 24z$$

Capítulo 3

Operaciones con números reales

1. Introducción

Las matemáticas juegan un papel fundamental para la gestión de recursos. Cada sector económico trata de establecer sus propias reglas matemáticas. Hay una tradición en la historia de la ciencia basada en principios matemáticos porque la base es sólida. La estadística, como tal, se usa en la gestión, la cual resulta de gran ayuda para dar respuesta a los problemas de la gestión financiera, la contabilidad y la estrategia que ayuda a la empresa a funcionar de manera eficiente.

Resuelva lo siguiente: $8 + 4 \times 2 + 3^2 - 24 \div 4$; ahora hazlo con la computadora ¿Obtienes el mismo resultado?

Cuando las operaciones se realizan en diferente orden se obtienen diferentes resultados, por lo que para evitar confusiones se ha establecido el siguiente orden:

1. Se realizan las acciones indicadas entre paréntesis.

2. Todas las capacidades están calculadas.

3. La multiplicación y la división se realizan en orden de izquierda a derecha.

4. Las sumas y restas especificadas se realizan de izquierda a derecha.

Aplicar las indicaciones

Haz lo indicado (primero sin la calculadora, luego confirma con ella):

1. $19 + 8 - 12 \div 4$
2. $14 \div (-4) + 5 * 6$
3. $28 \div 7 - 41 + 8 * 6$
4. $(-9) * (2 - 14) + 6(24 \div (-43))$
5. $6 * (2 + 3) - 7 * 8 \div 4$
6. $(-4) * (5 + (-2)) - 2\text{^}3 + (9 + (-3)) \div 2$

La siguiente tabla muestra los hechos importantes de las matemáticas reales que deben estudiarse en detalle. Se debe de tener la capacidad de usar los números reales ya que cumplen una parte vital para lograr encontrar la respuesta. Otra característica seguida de un número, como ejemplo: los denominadores tienen que ser diferente de 0. Esto indica que se tiene un conocimiento mínimo de las sumas o restas.

2. Propiedades de las operaciones con números reales

Tabla 1:

Propiedades y ejemplos de las operaciones con números reales

PROPIEDAD	EJEMPLO
1. $x - y = x + (-y)$	$7 - 9 = 7 + (-9) = -5$
2. $x - (-y) = x + y$	$7 - (-9) = 7 + 9 = 16$
3. $-x = (-1) * (x)$	$-7 = (-1) * (7)$
4. $x * (y + z) = xy + xz$	$7 * (9 + 6) = 7 * 9 + 7 * 6 = 105$
5. $x * (y - z) = xy - xz$	$7 * (9 - 6) = 7 * 9 - 7 * 6 = 21$
6. $-(x + y) = -x - y$	$-(7 + 9) = -7 - 9 = -16$
7. $-(x - y) = -x + y$	$-(7 - 9) = -7 + 9 = 2$
8. $-(-x) = x$	$-(-7) = 7$
9. $x * (0) = (-x) * (0) = 0$	$7 * (0) = (-7) * (0) = 0$
10. $(-x) * (y) = -(xy) = x * (-y)$	$(-7) * (9) = -(7 * 9) = 7 * (-9)$
11. $(-x) * (-y) = xy$	$(-7) * (-9) = 7 * 9 = 63$
12. $\frac{x}{1} = x$	$\frac{7}{1} = 7,\ \frac{-9}{1} = -9$
13. $\frac{x}{y} = x * \left(\frac{1}{y}\right)$	$\frac{7}{9} = 7 * \left(\frac{1}{9}\right)$
14. $\frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = \frac{-x}{y}$	$\frac{7}{-9} = -\frac{7}{9} = \frac{-7}{9}$
15. $\frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$	$\frac{-7}{-9} = \frac{7}{9}$
16. $\frac{0}{x} = 0$ cuando $x \neq 0$	$\frac{0}{7} = 0$
17. $\frac{x}{x}$=1 cuando $x \neq 0$	$\frac{7}{7} = 1,\ \frac{-9}{-9} = 1$
18. $x * \frac{y}{x} = y$	$7 * \frac{9}{7} = 9$

19. $x * \frac{1}{x} = 1$ cuando x ≠ 0	$7 * \frac{1}{7} = 1$
20. $\frac{x}{y} * \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}$	$\frac{7}{9} * \frac{6}{4} = \frac{7*6}{9*4} = \frac{42}{36}$
21. $\frac{xy}{z} = \left(\frac{x}{z}\right) * y = x * \left(\frac{y}{z}\right)$	$\frac{7*9}{6} = \left(\frac{7}{6}\right) * 9 = 7 * \left(\frac{9}{6}\right)$
22. $\frac{x}{yz} = \left(\frac{x}{y}\right) * \left(\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{y}\right) * \left(\frac{x}{z}\right)$	$\frac{7}{9*6} = \left(\frac{7}{9}\right) * \left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{9}\right) * \left(\frac{7}{6}\right)$
23. $\frac{x}{y} = \left(\frac{x}{y}\right) * \left(\frac{z}{z}\right) = \frac{x*z}{y*z}$ cuando z ≠ 0	$\frac{7}{9} = \left(\frac{7}{9}\right) * \left(\frac{6}{6}\right) = \frac{7*6}{9*6}$
24. $\frac{x}{y(-z)} = \frac{x}{(-y)(z)} = \frac{-x}{yz} = \frac{-x}{(-y)(-z)} = -\frac{x}{yz}$	$\frac{7}{9(-4)} = \frac{7}{(-9)(6)} = \frac{-7}{9*6} = \frac{-7}{(-9)(-6)} = -\frac{7}{54}$
25. $\frac{x-y}{z} = \frac{(-x)y}{z} = \frac{xy}{-z} = \frac{(-x)(-y)}{-z} = -\frac{xy}{z}$	$\frac{7(-9)}{6} = \frac{(-7)(9)}{6} = \frac{7*9}{-6} = \frac{(-7)(-9)}{-6} = -\frac{63}{6}$
26. $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{x+y}{z}$	$\frac{7}{6} + \frac{9}{6} = \frac{7+9}{6} = \frac{16}{6}$
27. $\frac{x}{z} - \frac{y}{z} = \frac{x-y}{z}$	$\frac{7}{6} - \frac{9}{6} = \frac{7-9}{6} = \frac{-2}{6}$
28. $\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{xw \mp zy}{yw}$	$\frac{7}{9} + \frac{6}{4} = \frac{7*4+6*9}{9*4} = \frac{82}{36}$
29. $\frac{x}{y} - \frac{z}{w} = \frac{xw-zy}{yw}$	$\frac{7}{9} - \frac{6}{4} = \frac{7*4-6*9}{9*4} = -\frac{26}{36}$
30. $\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}} = \frac{x}{y} \div \frac{z}{w} = \frac{x}{y} * \frac{w}{z} = \frac{x*w}{y*z}$	$\frac{\frac{7}{9}}{\frac{6}{4}} = \frac{7}{9} \div \frac{6}{4} = \frac{7}{9} * \frac{4}{6} = \frac{7*4}{9*6} = \frac{28}{54}$
31. $\frac{x}{\frac{y}{z}} = x \div \frac{y}{z} = x * \frac{z}{y} = \frac{xz}{y}$	$\frac{7}{\frac{9}{6}} = 7 \div \frac{9}{6} = 7 * \frac{6}{9} = \frac{7*6}{9} = \frac{42}{9}$
32. $\frac{\frac{x}{y}}{z} = \frac{x}{y} \div z = \frac{x}{y} * \frac{1}{z} = \frac{x}{yz}$	$\frac{\frac{7}{9}}{6} = \frac{7}{9} \div 6 = \frac{7}{9} * \frac{1}{6} = \frac{7}{9*6} = \frac{7}{54}$

Fuente: Haeussler y Paul (2003)

Ejemplo: aplicando las propiedades

Usando la propiedad que se encuentra en el número 23, el cual es un principio esencial para la resolución de fracciones que se establecen por el numerador y el denominador. Se multiplican o dividen por el mismo número distinto de cero, la fracción es igual (es decir, tiene el mismo valor) que la fracción original. Por lo tanto,

$$\frac{7}{\frac{1}{8}} = \frac{7 * 8}{\frac{1}{8} * 8} = \frac{56}{1} = 56$$

Para resolver esto, lo que se pasó hacer primero es multiplicar el valor completo por $\frac{8}{8}$ que no afecta en nada, sabiendo que $\frac{8}{8}$=1 y se sabe que todo número por 1 es el mismo número, una vez se multiplica

$$\frac{7}{\frac{1}{8}} * \frac{8}{8}$$

Se tiene $\frac{7}{\frac{1}{8}} * \frac{8}{8}$ es igual a $\frac{7*8}{\frac{1}{8}*8}$, por lo que $\frac{1}{8} * 8$ es igual a $\frac{8}{8}$, el cual la división de $\frac{8}{8}$ da 1, obteniendo de esta forma $\frac{7*8}{1}$, el cual da como resultado $\frac{56}{1}$, que a su ves es igual a 56

Por las propiedades 28 y 23 tenemos

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2 * 15 + 4 * 5}{5 * 15} = \frac{50}{75} = \frac{2 * 25}{3 * 25} = \frac{2}{3}$$

Como se pude aprecias, el primer paso es multiplicar $2 * 15$, luego este es sumado por $4 * 5$ y todo esto es dividido por $5 * 15$, esto gracias a la propiedad 28 la cual indica.

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{xw \mp zy}{yw}$$

En donde **x** fue remplazado por 2, **z** fue remplazado por 4, **y** fue remplazado por 5 y **w** fue remplazado por 15, dando de esta forma $\frac{2*15+4*5}{5*15}$, donde resolviendo los problemas matemáticos se obtiene $\frac{30 \mp 20}{75}$, y esto es igual a $\frac{50}{75}$. Pero se puede notar que 50 y 75 son múltiplos de 25, por lo cual se pude aplicar la propiedad 23 a la inversa,

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{x}{y}\right) * \left(\frac{z}{z}\right) = \frac{x*z}{y*z} \text{ cuando } z \neq 0$$

Reemplazando **x** con 2, **y** con 3 y **z** con 25, obteniendo de esta forma $\frac{2*25}{3*25}$, el cual al mismo tiempo es igual a $\frac{2}{3} * \frac{25}{25}$, y se obtiene que $\frac{25}{25}$ es igual a 1, dando como respuesta final $\frac{2}{3}$

Ejercicio: Simplificar las siguientes expresiones, siempre que se puedan.

1. $-4 + (-7)$
2. $7 + (-3)$
3. $4 - (-5)$
4. $-7 - (-8)$
5. $8 * (* 3)$
6. $(-4) * 8$
7. $-(2 + x)$
8. $-11 * (x - y)$
9. $2 \div -8$
10. $12 \div (-3)$
11. $-8[6 * 7 + (-5 * 4)$
12. $(-4) * (-4)$

13. $4 * (x + 5)$

14. $-(4 - x)$

15. $7 * \left(\frac{1}{21}\right)$

16. $\frac{-7x}{5y}$

17. $\frac{6}{4} * \frac{1}{x}$

18. $(4x) * \left(\frac{8}{4x}\right)$

19. $\frac{7}{x} * \frac{2}{y}$

20. $\frac{4}{12} + \frac{8}{12}$

21. $\frac{4}{15} - \frac{5}{16}$

22. $\frac{x}{12} - \frac{y}{12}$

23. $\frac{4}{7} - \frac{5}{8}$

24. $\frac{\frac{x}{9}}{y}$

25. $\frac{10}{0}$

26. $\frac{0}{0}$

27. $-10 + 8$

28. $-8 + 2$

29. $-10 - (-4)$

30. $(-4) * (2)$

31. $(-4) * (-2)$

32. $-(-7)$

33. $-5(x)$

34. $-[-4 + (-x)$

35. $-4 \div (-8)$

36. $4(-8 + 3$

37. $(-2) * (-3) * (-1)$

38. $x * (0)$

39. $7 * (2 + x)$

40. $0 * (-x)$

41. $\frac{7}{1}$

42. $\frac{6}{-3x}$

43. $\frac{x}{y} * 2z$

44. $-\frac{16y}{4x}$

45. $\frac{3}{x} * \frac{4}{y}$

46. $\frac{5}{16} + \frac{4}{15}$

47. $\frac{3}{8} + \frac{5}{8}$

48. $\frac{7}{4} - \frac{16}{6} + \frac{21}{8}$

49. $\frac{4}{\frac{x}{y}}$

50. $\frac{\left(\frac{-8}{7}\right)}{\frac{4}{14}}$

51. $\frac{0}{5}$

52. $0 * 0$

Capítulo 4

Exponentes y radicales:

1. Introducción

Las funciones exponenciales son muy importantes en matemáticas. Esta es la función más presente en las observaciones, en donde exhiben un comportamiento exponencial: multiplicación de colonias bacterianas, disminución de material radiactivo, aumento de cierta población, inflación, capitalización del dinero invertido en interés compuesto, etc.

Por lo tanto, es muy importante que los estudiantes conozcan los conceptos básicos y el desarrollo de estas ecuaciones exponenciales y sean capaces de comprender los fenómenos que hemos mostrado.

2. Definición de exponente

$$Si\ X\ \in R\ y\ \neq 0\ y\ \boldsymbol{n} \in Z:$$

$$a^n = a * a * a * a * a \ldots a \text{ (**a** se repite **n** veces)}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a*a*a*a*a\ldots*a} \text{ (**a** se repite **n** veces)}$$

"n" se le conoce como el exponente e indica la cantidad de veces que se multiplicara **a**

Ejemplo

$$3^3 = 3 * 3 * 3 = 27$$

$$x^6 = x * x * x * x * x * x$$

$$(2x)^4 = 2 * 2 * 2 * 2 * x * x * x * x$$

3. Definición de radicales

Si $r^n = x$, donde n pertenece a los naturales, entonces **r** es la n raíz cuadrada de **x**. Por ejemplo, $3^2 = 9$, entonces 3 es la raíz de 9, donde a menudo el número 2 de la raíz

es llamada raíz cuadrada. Donde $(-3)^2 = 9$, -3 la cual sigue siendo la raíz de 9. De igual forma, -3 es la raíz cubica de -27 por que $(-3)^3 = -27$.

Los números sin raíz cuadrada n son números reales. Por ejemplo, si se tiene un número real positivo, la cual es resultado de una raíz cuadrada, indicaría que el número real no pertenecería a los números negativos.

Se indica que la raíz enésima de **X**, es positiva, el resulta es un número positivo si **X** resulta ser positivo. En caso de que **X** sea negativo, el resultado serio negativo, esto se representaría como $\sqrt[n]{x}$, Es por ello que se tiene lo siguiente:

$$\sqrt[n]{x} \text{ es} \begin{Bmatrix} positiva\ si\ \boldsymbol{x}\ es\ positiva, \\ negativa\ si\ \boldsymbol{x}\ es\ negativa\ y\ \boldsymbol{n}\ es\ impar \end{Bmatrix}$$

3. Leyes de los exponentes y radicales

Tabla 2:

Ley de exponentes y radicales

1. $x^a * x^b = x^{a+b}$	**2.** $(x^a)^b = x^{a*b}$	**3.** $(xy)^a = x^a * y^b$
4. $(\frac{x}{y})^a = \frac{x^a}{y^a}$	**5.** $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$	**6.** $x^0 = 1$
7. $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$	**8.** $\frac{1}{x^{-a}} = x^a$	**9.** $\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a$
10. $\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{a}{b}}$	**11.** $\left(\sqrt[a]{x}\right)^b = \sqrt[a]{x^b}$	**12.** $\sqrt[a]{x * y} = \sqrt[a]{x} * \sqrt[a]{y}$
13. $\sqrt[a]{\sqrt[b]{x}} = \sqrt[a*b]{x}$	**14.** $\sqrt[a]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[a]{x}}{\sqrt[a]{y}}$	**15.** $\sqrt[a]{x}\sqrt[b]{x} = \sqrt[a*b]{x^{a+b}}$
16. $x^a = x^b \rightarrow a = b$	**17.** $x^a = y^a \rightarrow x = y$	

Fuente: Haeussler y Paul (2003)

Ejemplo1: aplicando las Leyes de los exponentes y radicales

1. $(x^2)^3 = x^{2*3} = x^6$

   Aplicamos la segunda ley la cual indica $(x^a)^b = x^{a*b}$ por lo que, remplazamos **a** y **b** por 2 y 3 respectivamente, obteniendo x^{2*3} lo que es igual a x^6

2. $(x^2 * y^3)^4 = x^{2*4} * y^{3*4} = x^8 * y^{12}$

Aplicamos la tercera ley la cual indica $(xy)^a = x^a * y^b$ por lo que, remplazamos **a** por 4, obteniendo $x^{2*4} * y^{3*4}$ lo que es igual a $x^8 * y^{12}$

3. $\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$

Aplicamos la quinta ley la cual indica $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ por lo que, remplazamos **a** y **b** por 2 y 3 respectivamente, obteniendo x^{5-3} lo que es igual a x^2

4. $\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}} = x^{\frac{4}{3}-\frac{5}{3}} = x^{\frac{4-5}{3}} = x^{-\frac{1}{3}}$

Aplicamos la quinta ley la cual indica $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ por lo que, remplazamos **a** y **b** por $\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{3}$ respectivamente, obteniendo $x^{\frac{4}{3}-\frac{5}{3}}$ lo que es igual a $x^{\frac{4-5}{3}}$ lo que resulta igual a $x^{-\frac{1}{3}}$

5. $x^{\frac{7}{2}} * x^{\frac{5}{3}} = x^{\frac{7}{2}+\frac{5}{3}} = x^{\frac{7*3+5*2}{2*3}} = x^{\frac{21+10}{6}} = x^{\frac{31}{6}}$

   Aplicamos la primera ley la cual indica $x^a * x^b = x^{a+b}$ por lo que, remplazamos **a** y **b** por $\frac{7}{2}$ y $\frac{5}{3}$ respectivamente, obteniendo $x^{\frac{7}{2}+\frac{5}{3}}$, aplicamos la propiedad 28 de los números enteros, lo que nos indica que $\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{xw \mp zy}{yw}$, remplazándolo y obteniendo que $x^{\frac{7*3+5*2}{2*3}}$ dando como resultado $x^{\frac{21+10}{6}}$ lo que es igual a $x^{\frac{31}{6}}$

6. $\frac{x^{-2}+y^{-2}}{(xy)^{-1}} = \frac{\frac{2}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{xy}} = \frac{\frac{2y+2x}{xy}}{xy} = \frac{(2y+2x)(xy)}{xy} = 2y + 2x$

   Aplicamos la séptima ley la cual indica $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ por lo que, remplazamos **a** para x^{-2}, y^{-2}y $(xy)^{-1}$, obteniendo $\frac{\frac{2}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{xy}}$ lo que es igual a $\frac{\frac{2y+2x}{xy}}{xy}$ lo que resulta igual a $\frac{(2y+2x)(xy)}{xy}$,dando como resultado a $2y + 2x$

Ejemplo 2: Encontrar el valor de x;

1. $3^x + 3^{x+1} = 108$

   $3^x + 3^x * 3^1 = 108$ aplicamos la primera ley de los exponentes

$3^x(1+3) = 108$ factorizamos 3^x

$3^x = \frac{108}{4}$

$3^x = 27$

$3^x = 3^3$ aplicamos la ley de los exponentes número 16

$x = 3$

2. $4^x + 4^{x+2} = \frac{17}{4}$

$4^x + 4^x * 4^2 = \frac{17}{4}$ aplicamos la primera ley de los exponentes

$4^x(1+4^2) = \frac{17}{4}$ factorizamos 4^x

$4^x = \frac{17}{4(1+4^2)} = \frac{17}{4(17)}$

$4^X = \frac{1}{4}$

$4^x = 4^{-1}$ aplicamos la ley de los exponentes número 7

$x = -1$

3. $\sqrt{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4} - 4 = 25^{3x}$

$5^{\frac{1}{2}} * (5^{-1})^{2x-4} = (5^2)^{3x}$ aplicamos la ley de los exponentes número 10 en $\sqrt{5}$

$5^{\frac{1}{2}} * \left(5^{(-1)*(2x-4)}\right) = 5^{(2)*(3x)}$ aplicamos la ley de los exponentes número 2 en $(5^{-1})^{2x-4}$

$5^{\frac{1}{2}} * 5^{-2x+4} = 5^{6x}$ aplicamos la propiedad de los números naturales número 5 en $(-1) * (2x-4)$

$5^{\frac{1}{2}+4-2x} = 5^{6x}$ aplicamos la ley de los exponentes número 1

$5^{\frac{1+8-4}{2}} = 5^{6x}$

$5^{\frac{9-4x}{2}} = 5^{6x}$ aplicamos la ley de los exponentes número 16

$\frac{9-4x}{2} = 6x$

$9 - 4x = 12x$

$9 = 12x + 4x$

$9 = 16x$

$x = \frac{9}{16}$

Ejercicio 1: Simplificar y expresar positivamente todas las respuestas

1. $(\boldsymbol{2^2}) * (\boldsymbol{3^3})$
2. $\boldsymbol{x^4 * x^3}$
3. $(\boldsymbol{x^2 * x^5})/(\boldsymbol{y^8 * y^7})$
4. $\frac{(\boldsymbol{x^3})^6}{(\boldsymbol{y^5})^8}$
5. $(\boldsymbol{3x^3 * y^4})^4$
6. $\frac{\boldsymbol{x^9}}{\boldsymbol{x^3}}$
7. $\frac{(\boldsymbol{x})^8}{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x^6})}$
8. $x^7 * x^2$
9. $x^2 * x^6 * x^9$
10. $(x^6)^8$
11. $\left(\frac{x^4}{x^7}\right)^9$
12. $\left(\frac{x^3 * y^4}{z^3}\right)^5$
13. $\left(\frac{12x^6}{6y^3}\right)^4$
14. $\frac{(x^3)^2 * (x^2)^3}{(x^2)^4}$

Ejercicio 2: Resolver los siguientes ejercicios

1. $2^3 * 2^2$
2. $\frac{3^7}{3^5}$
3. 9^{-3}
4. $1/7^{-2}$
5. 100^0
6. $(4^2)^3$
7. $(3 * 6)^3$
8. $\left(\frac{7}{9}\right)^3$
9. $3^2 * 3^3$
10. $\frac{8^7}{8^6}$
11. 8^{-3}
12. $1/4^{-2}$
13. 500^0
14. $(4^3)^3$
15. $(7 * 2)^3$
16. $\left(\frac{4}{7}\right)^2$

Ejercicio 3: Evaluar la expresión

1. $\sqrt{169}$
2. $\sqrt[3]{-27}$
3. $\sqrt[3]{\frac{27}{-8}}$
4. $9^{\frac{3}{2}}$

5. $(32)^{-\frac{2}{3}}$
6. $\sqrt[3]{125}$
7. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$
8. $(36)^{\frac{1}{2}}$
9. $(16)^{-\frac{3}{2}}$
10. $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{4}{5}}$
11. $\left(-\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$

Capítulo 5

Operaciones con expresiones algebraicas

1. Introducción

Traducir la expresión el triple de un número, el 10% de un valor, el 30%de una cuarta parte de un número. Al momento de remplace ese número por un valor conocido como si fuera el triple del **valor total**, el **10% de interés**, el **30% por la cuarta de un hotel**, tenemos que el significado de ser solo un simple número cambia al momento que introducimos palabras que ya conocemos, dando como resultado de las preguntas 3x, 0.10*x, 0.30*$\frac{x}{4}$

A lo largo de la historia, los números se han utilizado con mayor frecuencia. Pero su uso no es suficiente para establecer cálculos generales en base a posibles valores de cantidades que aparecen en diversos problemas de la vida cotidiana, principalmente del tipo geométrico y de muchos tipos. Algunos de ellos se encuentran relacionados con la astronomía. Fueron los árabes, los primeros en introducir sistemáticamente el uso de letras y otros símbolos para formar expresiones matemáticas, dando origen a una de las ramas de las matemáticas, la cual se conoce como álgebra (al-jabr). tratado algebraico.

Cuando los números representados por símbolos se combinan sumando, restando, multiplicando, dividiendo o sacando raíces cuadradas, la expresión que surge de esto, se le denomina como expresión algebraica.

Las expresiones algebraicas se pueden observar de la siguiente forma:

1. $\sqrt[3]{\frac{3x^3-5x-2}{10-x}}$
2. $10-3\sqrt{y}+\frac{5}{7+y^2}$
3. $\frac{(x+3)^3-xy}{y}+2$

La expresión algebraica como: $5ax^3-2bx+3$, tiene tres términos, los cuales son el $5ax^3$, $-2bx$ y 3. Unos factores que se muestran en el primer término es $5ax^3$,

donde se divide en 5, a, x^3, 2bx y 3. Además, 5a es un factor de x^3. A y b se denominan constantes si representan constantes en el análisis.

En expresiones de $5ax^3$, el factor de 5 se llama **coeficiente numérico**. El multiplicador x^3 se le denomina como la parte **literal** del término. En la expresión $-2bx$, el coeficiente es -2b y la parte **literal** es $\boldsymbol{x}$.

Las expresiones algebraicas que conllevan a un solo termino, se le es denomina como **monomio**. Las expresiones algebraicas que conllevan 2 términos de les denomina **binomio** y las expresiones con 3 términos se les conoce como **trinomio**. A continuación, se demuestran los ejemplos de las expresiones algebraicas.

Tabla 3:
términos de las expresiones algebraicas

Monomios	$3x^2,\ \ -4y\text{^}5,\ \ \frac{7}{z},\ \ 3,\ \ \frac{4xy}{z}$
Binomios	$4x+2,\ \ 3x^3-\frac{4}{y},\ \ 6x^2-8yz$
Trinomios	$4x^3+6X-2,\ 4x^2+8x-\frac{6}{x},\ 9x^2-6x+3$

Fuente: Arya y Lardner (2009)

2. Operaciones algebraicas

2.1.Suma de expresiones algebraicas

Simplificar: $(3x^2y-2x+1)+(4x^2y+6x-3)$

En primer lugar, tenemos que quitar los soportes. Luego, usando la ley de sustitución de sumas, sumamos todos los mismos términos. Los términos equivalentes son términos que difieren solo en los coeficientes. En este ejemplo, $3x^2\ y$ y $4x^2$ y son pares similares de 2x y 6x y 1 y -3. es por eso que,

$(3x^2y-2x+1)+(4x^2y+6x-3)$ aplicamos la propiedad conmutativa con la suma

$3x^2y-2x+1+4x^2y+6x-3$ Juntamos los términos idénticos, en este caso los juntamos por el color, para poder identificarlos

$3x^2y+4x^2y-2x+6x+1-3)$

Ejemplo por la propiedad distributiva,

$3x^2y + 4x^2y = (3+4)x^2y = 7x^2y$ por la propiedad distributiva a la inversa, se extrae x^2y, dando como resultado a $(3+4)x^2y$ lo que es igual a $7x^2$

$2x + 6x = (-2+6)x = 4x$, por la propiedad distributiva a la inversa, se extrae x, dando como resultado a $(-2+6)x$ lo que es igual a $4x$

Es por ello que, $(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3) = 7x^2y + 4x - 2$.

2.2.Sustracción de expresiones algebraicas

Simplificar: $(3x^2y - 2x + 1) - (4x^2y + 6x - 3)$.

En esta parte se aplica la definición de la resta y al mismo tiempo, se implementa la propiedad distributiva:

$(3x^2y - 2x + 1) - (4x^2y + 6x - 3)$ la definición de la resta indica que $-(a) = -1 * a = -a$ donde $4x^2y + 6x - 3$ vendría a ser a

$$= (3x^2y - 2x + 1) + (-1)(4x^2y + 6x - 3)$$

$$= (3x^2y - 2x + 1) + -4x^2\,y - 6x + 3$$

$3x^2y - 2x + 1 - 4x^2y - 6x + 3$ Juntamos los términos idénticos

$$= 3x^2y - 4x^2y - 2x - 6x + 1 + 3$$

$$= (3-4)x^2y + (-2-6)x + 1 + 3$$

$$= -x^2y - 8x + 4.$$

2.3.Eliminación de los símbolos de agrupación

Simplificar: $3\{2x[2x+3] + 5[4x^2 - (3-4x)]\}$.

Como primer paso, se debe de eliminar los caracteres del grupo más interno (paréntesis). Luego repita este proceso hasta que se eliminen todos los caracteres de agrupación, truncando tantos elementos iguales como sea posible.

$$3\{2x[2x+3] + 5[4x^2 - (3-4x)]\}$$

$$= 3\{2x[2x+3] + 5[4x^2 - 3 + 4x]\}$$

$$= 3\{4x^2 + 6x + 20x^2 - 15 + 20x\}$$

$$= 3\{24x^2 + 26x - 15\}$$

$$= 72x^2 + 78x - 45$$

2.4.Multiplicación de expresiones

Se tiene que las expresiones como $\boldsymbol{a(x+y)}$, donde **a** resulta ser el producto de $\boldsymbol{x+y}$. Para estos casos, cuando se quiere simplificar las expresiones, se requiere que los paréntesis, desaparezcan, para ello **x**, multiplica los valores que se encuentran adentro.

$$a(x+y) = ax + ay$$

Esto se debe simplemente a la asignación de propiedades. De igual forma, este método resulta útil con las expresiones algebraicas que se multiplican por cualquier motivo.

Ejemplo Multiplicación de expresiones

a) $-2(x - 3y + 7t^2) = (-2)x - (-2)(3y) + (-2)(7t^2)$

b) $x^2y(x^2 + 3x - 5y^3) = x^2y * x^2 + x^2y * 3x - x^2y * 5y^3$

$= x^4y + 3x^3y - 5x^2y^4$

Multiplicando dos manifestaciones algebraicas al mismo tiempo, la propiedad de distribución se puede usar más de una vez en los soportes. Considere el producto (x+2) (y+3). Podemos usar la propiedad distributiva para eliminar el primer paréntesis.

$$(x+2)(y+3) = x(y+3) + 2(y+3)$$

$$(x+2)(y+3) = (x+2)b = x * b + 2 * b = x(y+3) + 2(y+3)$$

En general, la propiedad distributiva que se explicó con anterioridad, tiene el efecto de reemplazar a, b, c con expresiones arbitrarias (así como otras propiedades de los números reales). Ahora usaremos este atributo nuevamente para eliminar el paréntesis restante.

$x(y+3) = xy + x * 3 = xy + 3x$

se ve que x pasa a multiplicar a los valores que están dentro del paréntesis, eliminando de esta forma el paréntesis

Al mismo tiempo,

$$2(y+3) = 2y + 2 * 3 = 2y + 6$$

Concluyendo en

$$2(\mathrm{y}+3) = 2\mathrm{y} + 2 * 3 = 2\mathrm{y} + 6$$

3. Productos especiales

Tabla 4:

Operaciones con expresiones algebraicas de productos especiales

1.	$x(y+z) = xy + xz$	(propiedad distributiva)
2.	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$	
3.	$(ax+c)(bx+d) = abx\text{^}2 + (ad+cb)x + cd$	
4.	$(x+a)\text{^}2 = x\text{^}2 + 2ax + a$	(cuadrado de un binomio).
5.	$(x-a)\text{^}2 = x2 - 2ax + a^2$	(cuadrado de un binomio).
6.	$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$	(producto de suma y diferencia).
7.	$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$	(cubo de un binomio).
8.	$3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$	(cubo de un binomio).

Fuente: Haeussler y Paul (2003)

Ejemplo: Productos especiales

a. Aplicando la regla 2

$$(x+2)(x-5) = [x+2][x+(-5)]$$
$$= x^2 + (2-5)x + 2(-5)$$
$$= x^2 - 3x - 10$$

b. Aplicando la regla 3

$$(3z+5)(7z+4) = 3 * 7z^2 + (3*4 + 5*7)z + 5*4$$
$$= 21z^2 + 47z + 20$$

c. Aplicando la regla 5

$$(x-4)^2 = x^2 - 2(4)x + 4^2$$
$$= x^2 - 8x + 16$$

d. Aplicando la regla 6

$$(\sqrt{y^2+1}+3)(\sqrt{y^2+1}-3) = \left(\sqrt{y^2+1}\right)^2 - 3^2$$
$$= (y^2+1) - 9$$
$$= y^2 - 8$$

e. Aplicando la regla 7

$$(3x+2)^3 = (3x)^3 + 3(2)(3x)^2 + 3(2)^2(3x) + (2)^3$$
$$= 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$$

3.1.División de expresiones

La ley de distribución se amplía para incluir el compartir, y tenemos la siguiente expresión general.

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$$

Esta opción resulta de ayuda cuando se quiere factorizar una expresión algebraica, debido a que le da la opción de separar los términos del monomio.

Ejemplo 1

a. $\frac{2x^2+4}{2x} = \frac{2x^2}{2x} + \frac{4x}{2x} = x + 2$

Se divide cada termino por el factor comun, el cual es 2x.

b. $\frac{2x^3-5x^2y+7x+3}{x^2} = \frac{2x^3}{x^2} - \frac{5x^2y}{x^2} + \frac{7x}{x^2} + 3/x^2$

$$= 2x - 5y + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}$$

c. $\frac{25t^3+12t^2+15t-6}{3t} = \frac{25t^3}{3t} + \frac{12t^2}{3t} + \frac{15t}{3t} - \frac{6}{3t}$

$$= \frac{25t^2}{3} + 4t + 5 - \frac{2}{t}$$

Cuando se toca el tema de la fracción, la expresión algebraica del numerador se llama **divisor** (es decir, cuanta veces que se está dividiendo), la expresión que es divisible por él se llama **dividendo**. En el ejemplo b) $2x^3 - 5x^2\ y + 7x + 3$ son el dividendo y x^2 son los divisores, y en c) $25t^3 + 12t^2 + 15t - 6$ es el divisor y **3t** es la división.

En el caso que se quiera dividir las expresiones algebraicas por un divisor, el cual contiene más de un término, se utiliza con mayor frecuencia, el proceso llamado "División larga". Este procedimiento contine las expresiones enteras que son positiva de la variable. A estas expresiones se les conoce como "polinomios"

Ejemplo 2

Dividir $-11x^2 + 2x^3$ entre $2x - 3$

Aquí $23 - 11x^2 + 2x^3$ sería el dividendo y $2x - 3$ se le considera como el divisor. Antes de dividir, tener un orden para el dividendo y divisor de forma descendente para la potencia de **x** y completa las potencias que faltan con coeficientes de **0**. Por lo tanto, el dividendo debe escribirse como:

$$2x^3 - 11x^2 + 0x + 23$$

Tabla 5:

División de expresiones

	$x^2 - 4x - 6$	←**Cociente**
Divisor → $2x - 3$	$2x^3 - 11x^2 + 0x$	←**Dividendo**
	$+ 23$	
	$2x^3 - 3x^2$	
	$\mathbf{-8x^2 + 0x + 23}$	
	$-8x^2 + 12x$	
	$\mathbf{-12x + 23}$	
	$\mathbf{-12x + 18}$	
	5	←**Residuo**

Fuente: Arya y Lardner (2009)

Se presentan los detalles de la "división larga", donde se presenta y explica como se ve a continuación siguiente forma: primero, dividimos $2x^3$ (el cual es parte del

dividendo y es su primer término) entre $2x$ (el cual es parte del divisor y también es su primer término) obteniendo de esta forma $\frac{2x^3}{2x} = x^2$. Dando de es esta forma el cociente y al mismo tiempo, su primer término. Realizamos el producto por parte del divisor $2x - 3$ y el primer cociente de x^2 obteniendo el valor de $2x^3 - 3x^2$.

Extraemos esta parte del dividendo con el resultado, obteniendo de esta forma el valor de $2x^3 - 11x^2 + 0x + 23 - (2x^3 - 3x^2)$, dando como resultado a $\mathbf{-8x^2 + 0x + 23}$. Para continuar con el siguiente término del cociente, se tiene que dividir el primer término de la sustracción, $-8x^2$, entre $2x$, el cual es el primer término del divisor. El cual da como resultado a $\frac{8x^2}{2x} = \mathbf{-4x}$, este se convierte en el segundo término que contendría el cociente.

Nuevamente, se debe de multiplicar el divisor por el segundo término, $\mathbf{-4x}$, dando como resultado el valor de $-8x^2 + 12x$; sustraemos esto de $-8x^2 + 0x + 23$, lo cual otorga una sustracción de, $\mathbf{-8x^2 + 0x + 23} - (-8x^2 + 12x)$, dando como resultado $\mathbf{-12x + 23}$. Continuamos este proceso hasta obtener una diferencia de potencia máxima, la cual es inferior al valor correspondiente del divisor, en donde se divide -12x por la primera variable del divisor, obteniendo $\frac{-12x}{2x} = -6$. A esta última diferencia la llamamos **residuo,** la cual es lo que queda de la diferencia entre $\mathbf{-12x + 23} - (\mathbf{-12x + 18})$, la cual da como resultado 5. Las respuestas se pueden guardar como

$$\frac{2x^3 - 11x^2 + 0x + 23}{2x - 3} = x^2 - \mathbf{4x} - 6 + \frac{5}{2x - 3}$$

En resumen, tenemos:

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Residuo}}{\text{Divisor}}$$

La forma de escribir la respuesta de la división larga es la misma como se muestra. Por ejemplo, considere los fertilizantes $\frac{267}{11}$, donde 267 Distribución de ganancias y privilegios son 11. Después, notamos que el cociente es 24 y el residuo es 3.

Tabla 6:

Pasos de la división de expresiones

	24	←**Cociente**
Divisor→ 11	267	← **Dividendo**
	22	
	047	
	44	
	3	←**Residuo**

Fuente: Arya y Lardner (2009)

Por lo tanto, decimos

$$\frac{267}{11} = 24 + \frac{3}{11}$$

En ves de dividir 267 entre 11, se divide $6x^2 + 2x + 7$ entre 2x-3. Donde x=10, estos números son iguales. Para ello, se requiere encontrar el cociente, el cual puede ser 2x-7 y el resto 6. Lo mismo sucede con la división larga, la cual es igual que la división aritmética.

Al multiplicar ambas partes del cálculo realizado, el cual da como respuesta por 24, donde se obtiene:

$$267 = (24 * 11) + 3$$

En resumen, tenemos:

$$Dividendo = (Cociente)(Divisor) + Residuo$$

Este resultado es de gran utilidad ya que permite comprobar el resultado de cualquier división larga. Se puede usar el resultado en la comprobación del ejercicio 1.

$$2x^3 - 11x^2 + 23 = (x^2 - 4x - 6)(2x - 3) + 5$$

$$Dividendo = (Cociente)(Divisor) + Residuo \rightarrow 25$$

Ejercicio: Simplificar las siguientes operaciones:

1. $(5a + 7b - 3) + (3b - 2a + 9)$
2. $\left(2\sqrt{a} + 5\sqrt{b}\right) + \left(3\sqrt{a} - 2\sqrt{b}\right)$
3. $(7t^2 + 6t - 1) - (3t - 5t^2 + 4 - t^3)$
4. $\left(2\sqrt{x} + \sqrt{2y}\right) - \left(\sqrt{x} - 2\sqrt{2y}\right)$
5. $4(2x + 3y) + 2(5y + 3x)$
6. $-(x - 7y) - 2(2y - 5x)$
7. $x(2x^2 + 3xy + y^2) - y(5x^2 - 2xy + y^2)$
8. $(x - 3)(y + 2)$
9. $(2x + 1)(3y - 4)$
10. $(a + 2)(3a - 4)$
11. $(x + 3)(2x^2 - 5x + 7)$
12. $(x + 4)(x - 4)$
13. $(2t + 5x)(2t - 5x)$
14. $\left(\sqrt{x} + 3\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - 3\sqrt{y}\right)$
15. $(x + y - z)(x + y + z)$
16. $(x^2 - 1)(x^3 + 2)$
17. $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)(x^3 + 2x)$
18. $(y + 6)^2$
19. $(2x + 3y)^2$
20. $\left(\sqrt{2x} - \sqrt{3y}\right)^2$
21. $(2x + 3y)^2 + (2x - 3y)^2$
22. $xy[(x + y)^2 + (x - y)^2]$
23. $3\{x^2 - 5[x + 2(3 - 5x)]\}$
24. $2a\{(a + 2)(3a - 1) - [a + 2(a - 1)(a + 3)]\}$
25. $\frac{4x^3 - 3x^2}{2x}$
26. $\frac{x^3 + 7x^2 - 5x + 4}{x^2}$
27. $\frac{t^2 - 2t + 7}{\sqrt{t}}$
28. $\frac{6x^2y - 8xy^2}{2xy} + \frac{x^3y^2 + 2x^2y^3}{x^2y^2}$
29. $(3x^2 - 5x + 7) + (-2 + 6x - 7x^2 + x^3)$

30. $(4xy + 5x^2y - 6x^3) + (3y^3 - 6xy^2 + 7xy + x^3 - 2x^2y)$
31. $(x^2 + 3xy + 4y^2) - (2x^2 - xy + 3y^2 - 5)$
32. $\left(5\sqrt{xy} - 3\right) - \left(2 - 4\sqrt{xy}\right)$
33. $2(x - 4y) + 3(2x + 3y)$
34. $3(x^2 - 2xy + y^2) - (2xy - x^2 + 2y^2)$
35. $a^2b(a^3 + 5ab - b^3) + 2ab(a^4 - 2a^2b + b^3a)$
36. $(x + 4)(y - 5)$
37. $(5x - 2)(2y - 5)$
38. $(x + 3y)(2x + y)$
39. $(a - 2b)(a^2 - 2ab + b^2)$
40. . $(y^2 - 2)(y^2 + 2)$
41. $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$
42. $\left(5\sqrt{x} + 2y\right)\left(5\sqrt{x} - 2y\right)$
43. $(x - 2y + z)(x + 2y + z)$
44. $(y^2 + 2y)(y^3 - 2y^2 + 1)$
45. $\left(2xy - \frac{x}{y}\right)\left(xy^2 + \frac{2y}{x}\right)$
46. $(x - 5)^2$
47. $(4x - 5y)^2$
48. $\left(\sqrt{x} + 2\sqrt{y}\right)^2$
49. $3[(x + y)^2 - (x - y)^2]$
50. $(3a - b)^2 + 3(a + b)^2$
51. $2\{a^2 - 2a[3a - 5(a^2 - 2)]\} + 7a^2 - 3a + 6$
52. $(a + 3b)(a^2 - 3ab + b^2) - (a + b)^2(a + 2b)$
53. $\frac{15x^5 - 25x^3}{5x^2}$
54. $\frac{y^4 + 6y^3 - 7y^2 + 9y - 3}{3y^2}$
55. $\frac{t^3 + 2t^2 - 3t + 1}{t\sqrt{t}}$
56. $\frac{3x^4y - 9x^2y^2}{3x^3y} - \frac{4x^3 - 8xy^2}{2x^2y}$

Capítulo 6
Factorización

1. Introducción

La multiplicación de factores ha sido estudiada por diversos expertos famosos, estos famosos resultan ser matemáticos, los cuales vivieron a lo largo de la historia. Estos matemáticos dieron solución de las ecuaciones polémicas, esto por medio de la factorización.

La solución para las ecuaciones polémicas fue el de descomponerlas. Esta herramienta que resulta ser la descomposición, es también la más usada para "transformar" expresiones algebraicas en métodos prácticos de resolución de problemas. Es importante resaltar que en transcurso de la historia, una solución a estas ecuaciones, también es la factorización, esto a que se encuentra relacionada principalmente con la necesidad de resolver ecuaciones cuadráticas.

Fueron los babilonios los que lograron resolver por primera vez las ecuaciones cuadráticas. Esto se puede observar en las tablillas que fueron descritas por Neugebau en 1930. Estas tablillas que tienen 4000 años de antigüedad y muestran soluciones de ecuaciones. Una de las técnicas que utilizan y que en la actualidad se llama “llenar el cuadrado”. Además de esta técnica, los babilónicos tenían una formula especial para resolver estas ecuaciones. Por ejemplo:

La necesidad de resolver las ecuaciones cuaternarias, los incentivo disfrazar estas ecuaciones y hacerlas pasar como ecuaciones cuadráticas, lo que permitió a los babilónicos dar respuestas a estas ecuaciones. En su momento, este debió de ser el mejor logro el poder resolver estas ecuaciones, ya que, al no tener designaciones modernas, su alto grado de abstracción los impulso a esta solución.

Pasando ya un tiempo, los matemáticos griegos, indios, árabes y los mismos europeos, se enfocaron en estudiar a las ecuaciones y trataron de regresar en el tiempo, esto para poder encontrar una forma de resolver todo tipo de ecuaciones mediante una formula.

El intento y el pasar de los años, hicieron que naciera el factoraje. El factoraje se transformó en una herramienta de trabajo que no se logró popularizar entre la gente común. En caso de realizarse un test sobre la población, en donde se preguntaría si el factoraje sirve para el mundo de los negocios, la gran parte de las personas indicarían que no tiene nada que ver. Las respuestas de este test se verían contradichas si es que se les enseña a las personas el uso del factoraje. Lamentosa mente el factoraje solo se puede aprender en las escuelas que están en el grado de secundaria, en instituciones superiores y en los negocios. El uso que se le da al factoraje a nivel comercial es muy amplio, esto depende del área a trabajar y darle su uso. Al mismo tiempo, es utilizado en el control de inventario, siendo capas de determinar altibajo, preparar los impuestos, clasificar los archivos con la información de las ventas realizadas, en donde se tienen los datos de las personas. Este trabajo se ve realizado de la forma más optima, gracias al programa llamado "Web Counter".

El programa también recoge los anuncios de la empresa, siempre que disponga de una página web, porque el ámbito comercial se desintegra desde el momento en que las personas inician su trabajo diario, construyen edificios o pasos a desnivel en calles muy transitadas, todo ello es estructurado en base al desarrollo matemático utilizado por las personas con las que interactúa (obreros, ingenieros, arquitectos) y sus distintos grados de intuición, rigor, razonamiento por analogía, aplicación funcional, etc. Por ejemplo, para construir un edificio usted mismo, se deben considerar muchos factores: propósito, función, metro cuadrado, número de habitaciones, número de ascensores, dirección del sol, presupuesto o período de tiempo. Podemos usar cálculos matemáticos.

En definitiva, el factorizare es muy beneficioso en muchos aspectos de nuestro negocio. Con su ayuda, podemos averiguar la tasa de descuento, los métodos de pedido y pago, y averiguar cómo funciona la economía de la empresa, la empresa e incluso el país.

Si se sabe que la multiplicación por dos variables (a, b), es igual a una tercera variable (c), se puede expresar de la siguiente forma.

$$\boldsymbol{c = a * b}$$

Dado a esta forma de la operación, se logra deducir que **a** y **b** son los factores que tiene **c**. De esta forma se entiende que **a** es un factor entero de **c** cuando **a** es divisible por **c**. un caso práctico seria que 2 y 5 son los factores de 10.

El término se puede usar para las expresiones algebraicas. En el caso de multiplicar dos o más expresiones, entonces se diría que estas expresiones son **"Factores"** del producto. Por ejemplo, $\boldsymbol{2xy}$, es el resultado de multiplicar 2, **x** e **y**, por lo que 2, **x** e **y** son factores de $\boldsymbol{2xy}$. Además, otro ejemplo es que $\boldsymbol{2y}$ es un factor de $\boldsymbol{2xy}$ porque $2xy$ se puede obtener multiplicando $\boldsymbol{2y}$ por $\boldsymbol{x}$.

De manera similar, $\boldsymbol{x}$ es el divisor de $\boldsymbol{2x^2 + 3x}$ porque podemos escribir $\boldsymbol{2x^2 + 3 = x(2x + 3)}$ y $\boldsymbol{x^2}$ es el factor de $\boldsymbol{6x^2 + 9x^3}$ porque podemos escribir $\boldsymbol{6x^2 + 9x^3 = x^2(6 + 9x)}$

El producto de los factores en los procesos que se resuelven las ecuaciones lineales es denominado "**factorizar**". En este punto se verá los métodos para analizar las expresiones algebraicas.

El primer paso para analizar las expresiones algebraicas, se tienen que seleccionas los números que contengan los mismos monomios.

Ejemplo 1: Factorizar los siguientes monomios comunes:

a. $a^2 + 2bc^2$

Escribimos cada término en esta expresión por sus factores básicos

$$a^2 = a * a \qquad 2ab^2 = 2 * a * b * b.$$

Mirando estas listas de los factores, se infiere que **a** es el divisor que se repite para ambos casos. Por lo que se escribe lo siguiente.

$$a + 2ab^2 = a * a + a^2 * b^2 = a(a\ 2b^2)$$

Observe cómo se usa la propiedad de división para extraer el factor común de x.

b. $2a^2y + 6ab^2$

Se expresa los términos en factores básicos. Se tiene

$$2a^2b = 2 * a * a * a \qquad y \qquad 6ab^2 = 2 * 3 * a * b * b$$

nuevamente, use la propiedad distribuida.

c. $6xy^2z^3 + 6x^2y^2z^2 + 18x^3yz^2$

Se factorizarán los siguientes términos:

$$6xy^2z^3 = 2 * 3 * x * y * y * z * z * z$$

$$6x^2b^2z^2 = 2 * 3 * x * x * y * y * z * z$$

$$18x^3yz^2 = 2 * 3 * 3 * x * x * y * z * z$$

Con esto realizado, se puede observar que estos términos son los que se repiten:

$$2 * 3 * x * y * z * z = 6xyz^2$$

$$6xy^2z^3 + 6x^2y^2z^2 + 18x^3yz^2 = 6xyz^2 * yz + 6xyz^2 * xy + 6xyz^2 * 3x^2$$

$$= 6xyz^2(yz + xy + 3x^2)$$

Una vez realizado todo esto, se realizará el problema de la factorización de expresiones binomiales gracias a las expresiones algebraicas. Unas de estas expresiones resultan útiles para la factorización:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Gracias a esta forma, se logra factorizar todo tipo de expresiones que tenga una diferencia cuadrados.

Ejemplo 2: Factorice completamente

$$a)\ x^2y^4 - 9; b)\ 5x^4 - 80y^4$$

Pasos de a) Esta expresión se puede escribir como

$$(xy2)^2 - 3^2$$

Se utiliza la diferencia de cuadrados para $a = xy^2$ y $b = 3$

$$x^2y^4 - 9 = (xy^2)^2 - 3^2(xy^2 - 3)(xy^2 + 3)$$

Se llega a un punto que no se logra factorizarse nada más en las expresiones que están dentro en los paréntesis.

b) Veamos primero si $5x^4 - 80y^4$ se puede factorizar. Se logra identificar que el termino se logra dividir por 5, lo cual lo convierte en el factor común.

$$5x^4 - 80y^4 = 5(x^4 - 16y^4)$$

Con esto se obtiene que $x^4 - 16y^4$ es una diferencia de cuadrados

$$5x^4 - 80y^4 = 5[(x^2)^2 - (4y^2)^2]$$

$$= 5[(x^2 - 4y^2)(x^2 + 4y^2)]$$

$$= 5[(x^2 - 4y^2)(x^2 + 4y^2)$$

Se observa que no se completo la factorización debido a que $x^2 - 4y^2 = x^2(2y)^2$ todavía se puede factorizar en $(x - 2y)(x + 2y)$. Por lo tanto, nos saltamos este paso.

$$5x^4 - 80y^4 = 5(x^2 - 4y^2)(x^2 + 4y^2)$$
$$= 5(x - 2y)(x + 2y)(x^2 + 4y^2) \rightarrow 27$$

Ejemplo 3: Factorizar

$ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2$

Se puede acumular las expresiones en los términos con factor x^2 y términos con factor y^2:

$$(ax^2 + bx^2) + (ay^2 + by^2)$$

Se identifica que los términos del paréntesis se pueden dividir por x^2, además que los términos son divisibles por y^2. De esta forma se logra comprender que la expresión se interpreta por.

$$x^2(a + b) + y^2(a + b)$$

Observe $(a + b)$ se repite para los dos términos. Por lo tanto

$$x^2(a + b) + y^2(a + b) = (a + b)(x^2 + y^2)$$

Es por ello que la expresión se represente como los siguientes factores $(a + b)$ y $(x^2 + y^2)$

Ejercicio: Resolver las siguientes operaciones

1. $3a + 6b$
2. $2x^2 + 10xy + 4x^3$
3. $4xy - 6yz$
4. $5x^2y + 10xy^2$
5. $2u + av - 2v - au$
6. $px - qy + py - qx$
7. $xy + 4x - 2y - 8$
8. $pq - 6q - 3p + 18$

9. $3x - py - 3y + px$
10. $2px - 3y + py - 6x$
11. $6xz - 16y - 24x + 4yz$
12. $15ac - 9ad - 30bc + 18bd$
13. $x^2 - 16$
14. $4y^2 - 25$
15. $3t^2 - 108a^2$
16. $5x^2 - 20y^2$
17. $x^3y - 25xy^3$
18. $x^5 - 4x^3y^2$
19. $x^2 + 3x + 2$
20. $x^2 + 5x + 6$
21. $x^2 + x - 2$
22. $x^2 - 7x + 12$
23. $x^2 - x - 2$
24. $x^2 - 8x + 12$
25. $x^2 - 15x + 54$
26. $x^2 - 14x + 48$
27. $x^2 - 12x + 11$
28. $x^2 - 9x + 20$
29. $2x^2 + 2x - 12$
30. $3x^2 - 6x + 3$
31. $5y^4 + 25y^3 - 70y^2$
32. $12x - 7x^2 + x^3$
33. $2x^2 + 5x + 3$
34. $6x^2 + 10x - 4$
35. $9 + 12x + 4x^2$
36. $9t^2 - 12t + 4$
37. $5x^2 - 17x + 6$
38. $2t^2 - 3t - 14$
39. $10x^2 - 11x - 6$

40. $2x^2 - 7t + 6$
41. $3q^2 + 20q + 32$
42. $10p^2 + 3p - 18$
43. $6x^3y + 4x^2y - 10xy$
44. $(x^3 - 9x) + (45 - 5x^2)$
45. $x^2 + 6xy + 5y^2$
46. $x^2 - 4xy - 5y^2$
47. $p^2 - pq - 20q^2$
48. $s^2 + 7st - 30t^2$
49. $2t^2 + tu - 6u^2$
50. $2x^2 - 9xy + 10y^2$
51. $6a^2 + ab - 15b^2$
52. $18u^2 + 15uv - 12v^2$
53. $x^3 - 27$
54. $8t^3 + 125$
55. $27u^3 + 8v^3$
56. $128x^3 - 54$
57. $64x^4y^2 - 27xy^5$
58. $x^2y^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2$
59. $x^2y^2 - 9y^2 - 4x^2 + 36$
60. $5u^2v^2 - 20v^2 + 15u^2 - 60$
61. $x^2z^2 - 4z^2 + x^4 - 4x^2$
62. $ax^3 + by^3 + bx^3 + ay^3$
63. $x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$
64. $x^3y - 8 + 8y - x^3$
65. $(x + y)^3(3x - 2y)^4 + 2(x + y)^4(3x - 2y)^3$
66. $2(a - b)^2(a + b)^3 - 5(a + b)^2(a - b)^3$
67. $(x + y)^2 + 3(x + y) + 2$
68. $2(x + y)^2 + 5(x + y) + 2$
69. $3(a - b\,)^2 + 5(a - b) + 2$
70. . $2(p - q)^2 - (p - q) - 1$

71. $3x^{2n} + 7x^n + 2$

72. $x^6 + y^6$

73. $x^6 - 8y^6$

74. $x^6 - 16y^4$

75. $(2x + 1)^2 - (x + 3)(x + 1)$

76. $x^4 + 4y^4$

77. $16a^4 + b^4$

78. $x^5 + y^5$

Capítulo 7
Fracciones

1. Introducción

Se cree que los egipcios fueron los primeros en usar fracciones, pero solo puedes obtener fracciones como 1/n o fracciones como una combinación de las dos. Los egipcios usaban fracciones con numeradores 1 y numeradores 2,3,4. y fracciones $\frac{4}{6}$ y $\frac{6}{8}$, y con ellas puedes hacer todo tipo de operaciones fraccionarias. Los babilonios, por su parte, inventaron una forma eficiente de sistematizar las notaciones que tienen las fracciones, esto les ayudo a identificar las aproximaciones decimales, lo que, en sí, resulta en una acción sorprendente. Este desarrollo que inventaron y gracias a su método de simplificación de fracciones, permitió la evolución y surgimiento de nuevas operaciones. Estas operaciones resultaron de gran ayuda a la comunidad de matemáticos que continuaría sus legados.

La fracción algebraica es un término que es utilizado cuando quieren hacer referencia a la razón de las expresiones, por ejemplo:

$$\frac{x^2-7x+5}{2x+3} \text{ y } \frac{x^2y+xy^2}{x-y}$$

Se tiene que considerar que las expresiones algebraicas deben de tener sentido, para ello se infiere que las variables del denominador sean diferentes a 0, como se puede apreciar en: $x \pm -\frac{3}{2}$, porque si $x = -\frac{3}{2}$ entonces $2x + 3 = 2\left(-\frac{3}{2}\right) + 3 = -3 + 3 = 0$, y el denominador será **0**. Similar a las fracciones en el lado derecho de $y \neq x$

En esta parte se profundizará los métodos para la reducción de las ecuaciones, para ello se tomarán en cuenta a la suma, resta, multiplicación y división de ecuaciones. Para lograr esto, se tiene que conocer el papel fundamental que tiene la factorización, ya que se utilizaran los principios básicos para la reducción de las ecuaciones.

2. Tipos de fracciones

2.1.Fracción Propia

Esta fracción toma relevancia cuando sabemos que el numerados es inferíos al denominador, dando como valor, un número que es inferior a 1.

$$\frac{2}{3} * \frac{4}{5} < 1$$

2.2.Fracción Impropia

Esta fracción toma relevancia cuando sabemos que el numerados es superior al denominador, dando como valor, un número que es más elevado al 1.

$$\frac{7}{5} * \frac{9}{4} > 1$$

Cualquier fracción incorrecta se puede representar como una fracción mixta

$$\frac{13}{4} = 3\,{}^{1}\!/_{4}$$

2.3.Fracción Impura.

Esta es una fracción contiene a los numeradores como múltiplos del denominador, lo que equivale a un número entero.

$$\frac{8}{4} = 4, \quad \frac{6}{2} = 3$$

3. Simplificación de fracciones

Siempre que se quiera dividir el numerador con el denominados en una fracción, se obtiene que la fracción es parecida. Este proceso se llama simplificación. Se debe de tener en cuenta que la lograr dividir estos términos por el mismo número, se tienen que contar con divisores comunes.

Ejemplo 1: Simplificar

$$\frac{4x^2 - 20x + 24}{6 + 10x - 4x^2}$$

Primero, analizamos completamente las expresiones que muestran al numerado y denominados. Se tiene que:

$$4x^2 - 20x + 24 = 4(x^2 - 5x + 6) = 2 * 2(x - 2)(x - 3)$$

Y se obtiene

$$6 + 10x - 4x^2 = -2(2x^2 - 5x - 3) = -2(2x + 1)(x - 3)$$

Tome en cuenta que la factorización del denominador, se logra obtener un valor de x^2, lo cual es un número positivo y este mismo puede ser tomado por **x.**

$$\frac{4x^2 - 20x + 24}{6 + 10x - 4x^2} = \frac{2 * 2(x - 2)(x - 3)}{-2(2x + 1)(x - 3)}$$

$$= \frac{2(x - 2)}{-(2x + 1)} = -\frac{2(x - 2)}{2x + 1}$$

Observa que dividimos el numerador y el denominador por los términos 2 y $x - 3$, en donde estos se manifiestan en el numerador como el denominador. Esto se realiza con la intención de factorizar los binomiales como es el caso de (x-3).

Por ejemplo, a veces hay fracciones que contienen raíces en el denominador

$$\frac{3}{3-\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$$

Se obtiene que la primera fracción este conformado por números. En esos casos, se tiene que el denominador presenta dos terminologías, se pueden simplificar usando la operación "racionalización del denominador. Para esto se tiene que tomar en cuenta a la primea de las dos fracciones como se muestra en el ejemplo."

$$\frac{2}{3 - \sqrt{2}} = \frac{2\left(3 + \sqrt{2}\right)}{\left(3 - \sqrt{2}\right)(3 + \sqrt{2})}$$

Esto logra funcionar gracias denominador de las fracciones restantes, en donde estas se logran simplificar por parte de la fórmula de "diferencia."

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Teniendo $a = 3\ y\ b = \sqrt{2}$,

$$(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})=3^2-(\sqrt{2})^2=9-2=7$$

Por lo que se tiene

$$\frac{2}{3-\sqrt{2}}=\frac{2(3+\sqrt{2})}{7}$$

En general, para reducir una fracción con la misma expresión que $A+\sqrt{B}$ sobre el denominador, se multiplica el numerador, $A-\sqrt{B}$. Si $A-\sqrt{B}$, multiplicamos tanto el numerador con el denominador por $A+\sqrt{B}$. de forma general, en caso de un demonio por: $P\sqrt{A}\pm Q\sqrt{B}$ surge el denominador de la fracción, se multiplica el número con el denominador

Ejemplo 2: Racionalice los denominadores de las expresiones siguientes:

$$a)\ \frac{1}{2\sqrt{5}+3\sqrt{3}} \qquad\qquad b)\ \frac{x-3}{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}$$

a) El factor $2\sqrt{5}+3\sqrt{3}$ se tiene que el denominador por lo cual multiplicamos por $2\sqrt{5}-3\sqrt{3}$:

$\frac{1}{2\sqrt{5}+3\sqrt{3}}=\frac{1*(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})}{(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})*(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})}$ Primero multiplicamos toda la ecuación con $(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})$ con esto se puede retirar la raíz del divisor.

$$\frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{(2\sqrt{5})^2-(3\sqrt{3})^2}$$

$$\frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{4*5-9*3}=\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{27}$$

$$=-\frac{1}{7}(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})$$

b) Multiplicamos por $\sqrt{x+2}+\sqrt{5}$:

$$\frac{x-3}{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}=\frac{(x-3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{5})(\sqrt{x+2}+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{(x-3)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$$

$$\frac{(x-3)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{5}\right)}{x \pm 5}$$

$$\frac{(x-3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{5})}{x-3}$$

$$= \sqrt{x+2}+\sqrt{5}$$

Ejercicio: Resolver las siguientes ecuaciones

1. $\frac{4x}{2x+3}+\frac{6}{2x+3}$
2. $\frac{2x}{x-2}-\frac{4}{x-2}$
3. $\frac{x^2}{x-3}-\frac{5x-6}{x-3}$
4. $\frac{2-3x}{x-1}+\frac{x^2}{x-1}$
5. $\frac{2x+1}{x+2}+3$
6. $\frac{3x-2}{x+1}-2$
7. $\frac{x}{x+2}+\frac{3}{2x-1}$
8. $\frac{x}{2x-6}+\frac{x-2}{x+1}$
9. $\frac{2}{x-1}-\frac{3x+1}{x+1}$
10. $\frac{x}{2x+3}-\frac{2x-3}{4x+1}$
11. $\frac{2x}{2x-1}-\frac{x+2}{x+1}$
12. $\frac{2}{5x-6}-\frac{4}{10x-2}$
13. $\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{1}{x^2-3x+2}$
14. $\frac{x}{x^2+2x-3}+\frac{1}{x^2+x-2}$
15. $\frac{x}{x^2+2x-3}+\frac{1}{1-2x+x^2}$
16. $\frac{2}{9x^2-6x+1}-\frac{3}{x+1}+\frac{1}{3x^2+2x-1}$
17. $\frac{1}{x^2+4x+3}+\frac{3}{x^2-1}-\frac{2}{x+3}$

18. $\frac{x}{2x^2-x-1}-\frac{3}{1-2x+x^2}+2$
19. $\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\left(\frac{x^2+2x}{x+1}\right)$
20. $\left(\frac{x^2+4x}{2x+6}\right)\left(\frac{2x+4}{x+4}\right)$
21. $\frac{2x+4}{1-x}*\frac{x^2-1}{3x+6}$
22. $\frac{x^2-7x+12}{x^2-x-2}*\frac{x^2+4x+3}{2x^2-5x-3}$
23. $\left(\frac{x^2+5x+6}{x^2-6x+8}\right)\left(\frac{2x^2+9x+4}{2x^2+7x+3}\right)$
24. $\left(\frac{2x^4-2x}{2x^2-5x-3}\right)\left(\frac{2x^2-3x-2}{x^3+x^2+x}\right)$
25. $\left(3+\frac{1}{x-1}\right)\left(1-\frac{1}{3x-2}\right)$
26. $\left(x-\frac{3}{x-2}\right)\left(\frac{9}{x^2-9}-1\right)$
27. $\left(\frac{x^2+x}{2x+1}\right)\div\left(\frac{x^3-x}{4x+2}\right)$
28. $\left(\frac{3x-6}{2x^2+4x+2}\right)\div\left(\frac{x^2-4}{x^2+3x+2}\right)$
29. $\frac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}\div\frac{3x^2+5x+2}{2x^2-5x+2}$
30. $\frac{2x^2+x-1}{2x^2+10x+12}\div\frac{1-4x^2}{4x^2+8x-12}$
31. $\frac{\frac{x^2+x-2}{2x+3}}{\frac{x^2-4}{2x^2+5x+3}}$
32. $\frac{1-\frac{1}{t^2}}{t+1-\frac{2}{t}}$
33. $\frac{x+2+\frac{3}{x-2}}{x-6+\frac{7}{x+2}}$
34. $\frac{p-\frac{2}{p+1}}{1-\frac{4p+7}{p^2+4p+3}}$
35. $x^{-1}+y^{-1}(x+y)^{-1}$
36. $(x-y)^{-1}(x^{-2}-y^{-2})^{-1}$
37. $\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-2}-y^{-2}}\times\frac{x-y}{x+y}$
38. $\frac{y^{-2}-x^{-2}}{xy^{-1}-yx^{-1}}$
39. $\frac{1}{h\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)}$

40. $\frac{1}{h}\left[\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}\right]$
41. $\frac{1}{3+\sqrt{7}}$
42. $\frac{3+\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$
43. $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$
44. $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$
45. $\frac{3}{3+\sqrt{3}}$
46. $\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}$
47. $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$
48. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$
49. $\frac{x}{x+2-2}$
50. $\frac{x}{x+1-x-1}$
51. $\frac{2x-2}{\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}}$
52. $\frac{4-x}{\sqrt{2x+5}-3\sqrt{x}}$
53. $\frac{5-\sqrt{3}}{2}$
54. $\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x}}{2}$
55. $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$
56. $\frac{\sqrt{x-2+h}-\sqrt{x-2}}{h}$

Capítulo 8
Ecuaciones lineales

1. Introducción

Los egipcios desarrollaron el algebra primitiva, esto fue desarrollado para dar respuesta a problemas comunes y que se relacionan con la división de insumos. En ese momento, los egipcios inventario un método para dar respuestas a la las ecuaciones de primer grado, en done el orden que se les da, se le denomina como "método de desplazamiento.

El álgebra lineal o también llamada ecuación lineal es muy utilizada en la gestión empresarial, es una herramienta muy importante, el punto principal, pues con ella se puede calcular la utilidad de la empresa en diferentes periodos, el balance permite comprender y analizar los resultados de la operación de la empresa. y cuentas, ayudándonos así a hacer más transparentes y mejores soluciones, también nos permite calcular informes presupuestarios, el álgebra lineal nos brinda herramientas, métodos y técnicas para administrar la información de la empresa de manera más inteligente y obtener resultados de alta calidad.

La ecuación es un enunciado en donde se ensena la igualdad que tienen las expresiones algebraicas. En gran medida, estas conllevan una o más variable

1. $2x - 3 = 9 - x$
2. $y^2 - 5y = 6 - 4y$
3. $2x + y = 7$
4. $\frac{a}{1-r} = s$

En la ecuación (1), la variable es la letra **x**, mientras que en la ecuación (2) es **y**. En la ecuación (3), tenemos dos variables **x** e **y**. No permitiremos que ninguna variable en la ecuación tenga un valor que haga que el término de la ecuación sea desconocido. Por ejemplo, en la ecuación (4), **r** no puede ser igual a 1, ya que esto resultaría en una división por 0.

Las expresiones separadas por un signo igual se denominan lados (elementos) de la ecuación; individualmente se les llama izquierda (primer término) y derecha (segundo término).

Las ecuaciones contienen solo constantes y ninguna variable que pueda ser verdadera o falsa. Por ejemplo,

$$3 + 2 = 5 \quad \text{y} \quad \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

estas son declaraciones verdaderas

$$2 + 5 = 6 \quad \text{y} \quad \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$$

Estas son sugerencias falsas.

Una ecuación que involucra una variable suele ser verdadera para algunos valores de la variable mientras que falsa para otros valores de la variable. Por ejemplo, considere la ecuación

$$2x - 3 = x + 2$$

Si **x** toma el valor 5, la ecuación se reduce **a**

$$2(5) - 3 = 5 + 2 \quad \text{o también} \quad 10 - 3 = 5 + 2$$

esa es una proposición válida. Por otro lado, si **x** toma el valor 4, obtenemos

$$2(4) - 3 = 4 + 2 \quad \text{o también} \quad 5 = 6$$

que es una proposición falsa.

El valor de la variable que hace que una ecuación sea verdadera se llama **raíz** o **solución** de esa ecuación. Decimos que tal valor de la variable satisface la ecuación.

Por ejemplo, 5 es la solución de $2x - 3 = x + 2$. De manera similar, -2 es la solución de $y^2 + 3y = 6 + 4y$ porque cuando -2 sustituye y en la ecuación, obtenemos

$$(2)^2 - 3(2) = 6 + 4(-2)$$

o bien, $4 - 6 = 6 - 8$ que es una proposición verdadera

A menudo, nos interesa encontrar una solución a una ecuación dada (es decir, encontrar todos los valores de una variable que hacen que la ecuación sea verdadera). El proceso de encontrar soluciones se llama resolver ecuaciones. En el proceso, trabajamos constantemente en la ecuación, transformándola en una nueva ecuación que es más fácil de resolver. Esta simplificación debe hacerse para que la nueva ecuación tenga la misma solución que la ecuación original. Las siguientes dos operaciones crean una nueva ecuación y satisfacen el requisito de que la solución a la ecuación siga siendo la misma.

2. Principios de ecuaciones lineales

2.1.Principio de suma

Se puede decir que la suma o resta de estas constantes que son incluidas en ambas partes de la ecuación.

2.2.Principio de multiplicacion

Se puede multiplicar o dividir los dos lados de las ecuaciones.

Ejemplo 1: resolver lo siguiente:

$$5x - 3 = 2x + 9$$

Primero, restamos 2x en ambos lados de la ecuación y simplificamos.

$$5x - 3 - 2x = 2x + 9 - 2x$$

$$5x - 2x - 3 = 2x - 2x + 9$$

$$3x - 3 = 9$$

Ahora suma 3 a ambos lados de la ecuación y vuelve a simplificar.

$$3x - 3 + 3 = 9 + 3$$

Finalmente, divida ambas partes por 3 (no cero).

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

Por tanto, la solución de la ecuación es $x = 4$

Ejercicio 1: Comprobar si los números dispuestos son soluciones de las ecuaciones correspondientes

1. $3x - 7 = 12 + 2x$; 1
2. $5t - 3 = 18 + 3(1 - t)$; 3
3. $\frac{u+2}{3u-1} + 1 = \frac{6-u}{u+1}$; 2
4. $\frac{1-2y}{3-y} + y = \frac{1}{y+2}$; -2
5. $x^2 = 5x - 6$; $2,5$
6. $y^2 + 12 = 7y$; $4, -3$
7. $\frac{5}{x} - \frac{3}{2x} = \frac{x}{2}$; 3
8. $\frac{7}{x+1} + \frac{15}{3x-1} = 8$; $-\frac{\frac{1}{2,1}}{3}$
9. $\frac{3}{x-1} + \frac{5x}{x+2} = \frac{1}{4}$; 1
10. $3x + \frac{7}{x} = 3$; 0

Ejercicio 2: Convierte las siguientes ecuaciones en ecuaciones polinómicas y da el orden del resultado.

11. $x^3 - 7x^2 + 5 = x(x^2 - 1) + 3x^2 - 2$
12. $(y - 2)(y + 5) = (2y - 1)(y + 1) + 7$
13. $y^2 + 7 = (y - 1)^2 + 3y$
14. $(u - 1)^2 = (u + 1)(u + 3) + 5$

Ejercicio 3: Resolver las siguientes ecuaciones.

15. $1 + x = 3 - x$
16. $3x + 7 = 3 + 5x$
17. $2x - 5 = -15 - 3x$
18. $2 - 7x = 3x - 2$
19. $4(x - 3) = 8 - x$
20. $2x - 5(1 - 3x) = 1 - 3(1 - 2x)$
21. $3 - 2(1 - x) = 5 + 7(x - 3)$

22. $6y - 5(1 + 2y) = 3 + 2(1 - y)$
23. $3z - 2 + 4(1 - z) = 5(1 - 2z) - 12$
24. $5[1 - 2(2z - 1)] = -3(3z - 1) + 1$
25. $1 - 2[4 - 3(x + 1)] = 4(x - 5) - 1$
26. $3[2x + 1 - 2(2x - 1)] + 4 = 2[1 + 2(3 - x)]$
27. $(3x + 7)/2 + \frac{1+x}{3}$
28. $(2x - 7)/3 = 5 - \frac{3x-2}{4}$
29. $1 - \frac{2u-3}{4} = \frac{2-5u}{3} - 3u$
30. $(5y - 6)/2 = y - \frac{2-y}{3}$
31. $\frac{1}{3}(2y + 1) + \frac{1}{2}y = \frac{2}{5}(1 - 2y) - 4$
32. $\frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{4(3z-1)}\right] = \frac{2z}{3} - \frac{1}{2}$

Ejercicio 4: Reduce las siguientes ecuaciones a ecuaciones lineales y resuélvelas.

33. $(x - 4)^2(x - 2)^2$
34. $(x - 1)(x + 3 = (x + 2)(x - 3) + 1$
35. $x^2 + (x + 1)^2 = (2x - 1)(x + 3)$
36. $(3x - 1)(x + 2) + 5x = (2x + 1)(x - 3) + x^2$
37. $(2x + 1)(x - 1) + x^2 = 3(x - 1)(x + 2) - 3$
38. $(3x + 1)(2x - 1) - 2x^2 = (2x - 3)^2 + 6x + 5$
39. $x(x + 2)(x + 4) + x^3 = 2(x + 1)^3$
40. $(x + 1)^3 + (x - 1)^3 = 2x^3$

Ejercicio 5: Resuelva las siguientes ecuaciones para las variables dadas.

41. $ax + by = cz$
42. $S = (a - rl)/(1 - r)$
43. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{t}$
44. $\frac{2}{x} + \frac{3}{xy} = 1$

REFERENCIAS

Haeussler, E. y Paul, R. (2003). Matemáticas para Administración y Economía. Pearson Educación

Ocaña, A. y Pérez, M. (2010). Matemáticas Básicas. Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano

Arya, J. y Lardner, R. (2009). Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía. Pearson Educación

Navarrete, Raúl (2017). Manual de matemática I. Universidad Autónoma de Ica

Curo, A. y Martínez, M. (2016) Matemática para administradores. Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas

Acuña. Luis (2008). Ejercicios de Matemática para Administración. Instituto Tecnológico de Costa Rica

Montero, G. (2005). Apuntes para la asignatura matemáticas básicas. Fondo Editorial FCA

Margaría, O. y Bravino, L. (2014). Matemática financiera. Universidad nacional de córdoba

Cerda, L. y Morocho, J. (2018). Introducción a la matemática empresarial. ESPOCH

Agud, L. y Mora, M. (2019). Matemáticas básicas para ingenierías. Universitat Politécnica de València

Cerena, Marilina (2019). Manual de matemáticas preuniversitarias. Universidad Nacional del Litoral

Canos, M., Ivorra, C. y Liern, V. (2001). Matemáticas para la economía y la empresa. Departamento de Economía Financiera y Matemática

Ahumada, C. (2022). Matemática básica teoría y práctica. depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú

Carta de Recomendación

Es mi privilegio emitir esta carta de recomendación personal al doctor **Anwar Julio Yarin Achachagua** portador del documento de identidad nacional **41133522** con residencia en **MZ I´ LOTE 10 BARRIO 4 SECTOR 2 URB. PACHACAMAC**, a quien tengo el honor de conocer de vista y de quien puedo dar fe de que es un excelente ciudadano, responsable, solidario, y ha mantenido en todo momento una impecable conducta de sólida moral.

Puedo atestiguar que el **doctor Yarin** ha presentados trabajos de investigación, los cuales lleva laburando desde más de 5 años como "Correlaciones numéricas sobre la microestructura y tasa de enfriamiento resultante del ensayo Jominy" el cual se publicó en el 2010, sus trabajos publicados cuentan con información precisa y confiable, la cual apoya a la comunidad para la investigación de nuevos casos

En mis años trabajando con el **doctor Yarin** puedo garantizar que es un excelente trabajador que demuestra los veneficios que producen los temas que investiga y produce en sus trabajos. Por estas y múltiples otras razones que con mucho gusto puedo comunicarle si lo considera necesario, es un privilegio para mí, el otorgar mi más completa y cabal recomendación personal.

Sé que, sin duda, en cualquier lugar, él dejara muy en alto su propio nombre y el mío, ya que ella busaca la forma de crecer y mejorar sus habilidades como investigador. Por favor, no dude en contactarme si necesita algún dato o información adicional.

Atentamente,

Javier Hugo Moran Ruiz
DNI: 07376099